Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2018

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 Gruppe A (MO, 07.05.2018) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden $\boxed{\textbf{\textit{Kästchen}}}$ **eingetragenen Antworten.**

Machen Sie sich zunächst Notizen

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

a) Gegeben sei das Skalarfeld $f : [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R} : f(x, y) = \sin(x + y)\cos(x - y)$.
Zeigen Sie, dass der Gradient folgende Form besitzt:

$$\begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \cos(2y) \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie anschließend die Hesse Matrix von f in einem Punkt (x, y). *a): 1,5 P.*

Hinweis: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x + y)\cos(x - y) - \sin(x + y)\sin(x - y) \\ \cos(x + y)\cos(x - y) + \sin(x + y)\sin(x - y) \end{pmatrix} = [Hinweis] = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \cos(2y) \end{pmatrix}$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -2\sin(2x) & 0 \\ 0 & -2\sin(2y) \end{pmatrix}$$

b) Entwickeln Sie f in ein quadratisches Taylor–Polynom um den Punkt $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12})$. Berechnen Sie die dabei auftretenden Matrix-Vektor- und Vektor-Vektor- Multiplikationen explizit. Vereinfachen des Polynoms nicht notwendig. *b): 1 P.*

Hinweis: $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} H(f)(x_0, y_0)\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{6} \\ x - \frac{\pi}{12} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{6} \\ x - \frac{\pi}{12} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{6} \\ x - \frac{\pi}{12} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{12}) - \frac{1}{2}(\sqrt{3}(x - \frac{\pi}{6})^2 + (x - \frac{\pi}{12})^2)$$

c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f in $[0, \pi] \times [0, \pi]$.
Geben Sie an, ob f an diesen Punkten elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.
Handelt es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte? *c): 3,5 P.*

Hinweis: Achtung: Ist $x, y \in [0, \pi] \Rightarrow 2x, 2y \in [0, 2\pi]$

Es muss erfüllt sein:

$$\nabla f(x,y) = 0 = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \cos(2y) \end{pmatrix}$$

Durch lösen des Gleichungssystems ergeben sich folgende Punkte, sowie die dazugehörige Hesse Matrix. Durch das Hauptminorenkriterium ergibt sich die Art des Punktes:

$$P1 : Hf(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P2 : Hf(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P3 : Hf(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P4 : Hf(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

P1 und P2 sind elliptische Punkte, P3 und P4 hyperbolische.
P1 ist ein Maximum, P2 ein Minimum. P3 und P4 sind Sattelpunkte.

- **Aufgabe 2.**

a) Zeigen Sie, dass folgende Funktionen bei $(x, y) = (0, 0)$ nicht stetig sind: *a): 3 P.*

$$h(x,y) := \begin{cases} \frac{y^2+x^3}{x^3+y} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^5+3y^3}{(x^3-y^3)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Für h setze z.B. $y = 0$, dann gilt:

$$\lim_{x \to 0} h(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1 \neq 0.$$

Für g setze z.B. $y = -x$, dann gilt:

$$\lim_{y=-x \to 0} g(x,-x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^5 - 3x^3}{(x^3 + x^3)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^5 - 3x^3}{x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 3}{x^3} \to \infty \neq 0.$$

b) Wo ist folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig? *b): 1,5 P.*

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3+y^2x-x^2y-y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^2x - x^2y - y^3}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)(x - y)}{x^2 + y^2} = x - y$$

Als Polynom ist f somit überall stetig.

c) Berechne die Richtungsableitung von f aus dem vorherigen Unterpunkt in Richtung (v, w) mit $v^2 + w^2 = 1$, an der Stelle $(0, 0)$. *c): 1,5 P.*

Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Richtungsableitung.

$$\partial_{(v,w)} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h \cdot (v,w)) - f(0,0)}{h}.$$

$$\partial_{(v,w)} f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((hv, hw)) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{hv - hw}{h} = v - w.$$

Alternativ:

$$\partial_{(v,w)} f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = v - w$$

- **Aufgabe 3.**

a) Wo besitzt die Funktion $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ im III. Oktanten ($x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0$) gelegenen Teil des Ellipsoids

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

ihr Maximum? Ermitteln Sie diese mittels Lagrangemultiplikatormethode! *b): 3 P.*

Lagrangemethode:

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2y^2z^2 + \lambda(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2xy^2z^2 + 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow x(y^2z^2 + \lambda) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2x^2yz^2 + \frac{1}{2}\lambda y = 0 \Leftrightarrow y\left(x^2z^2 + \frac{\lambda}{4}\right) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= 2x^2y^2z + \frac{2}{9}\lambda z = 0 \Leftrightarrow z\left(x^2y^2 + \frac{\lambda}{9}\right) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0
\end{aligned}$$

Für $x = 0$ folgt, $y = 0$ und $z = 0$. Aber an P=$(0,0,0)$ ist die NB nicht erfüllt!

Aus $\lambda = 0$ folgt, dass $x = y$ und $z = 0$, $x = z$ und $y = 0$, sowie $y = z$ und $x = 0$, wobei aufgrund der Vorzeichen der NB (III. Oktant) nur $x = y$ und $z = 0$ erfüllt ist. Dieser Punkt $f(x,y,0)$ kann aufgrund von $f(x,y,z) \geq 0 \;\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$ nur ein Minimum sein.

Sei nun $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $z \neq 0$, so folgt aus den obigen Gleichung:

$$-\lambda = y^2z^2 = 4x^2z^2 = 9x^2y^2$$

Setzt man nun in die letzte Gleichung ein ergibt sich:

$$x^2 + x^2 + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \text{ und da } x \leq 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \;\; z = +\frac{3}{\sqrt{3}} = +\sqrt{3}$$

An diesem Punkt gilt:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, +\sqrt{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Somit besitzt $f(x,y,z)$ an diesem Punkt ein Maximum.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^5 + y^4 - 4xy - 11x + 2$$

Man soll zeigen, dass $f(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (1,2)$ lokal nach $y = y(x)$ auflösbar ist! *b): 1 P.*

i) $f(1,2) = 0$ ist erfüllt

ii) Alle Partiellen Ableitung sind in einer Umgebung von (1,2) stetig

$$f_x = 5x^4 - 4y - 11 \qquad \text{und} \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

iii) Weiters gilt $f_y(1,2) = 32 - 4 = 28 \neq 0$

Da alle Bedingungen des Hauptsatzes über implizite Funktionen erfüllt sind, gilt:
f ist in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (1,2)$ lokal nach $y = y(x)$ auflösbar!

c) Berechnen Sie für die Funktion $y = y(x)$ das Taylorpolynom 1. Grades um die Stelle $(x_0, y_0) = (1,2)$ durch implizites Differenzieren! *c): 2 P.*

$$T(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = 2$$

$$f(x, y(x)) = 0 \Rightarrow f_x + f_y \cdot y' = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{5x^4 - 4y - 11}{4y^3 - 4x}$$

$$\Rightarrow y'(1) = -\frac{5 - 8 - 11}{32 - 4} = \frac{1}{2}$$

Dadurch ergibt sich für das Taylorpolynom:

$$T(x) \approx 2 + \frac{1}{2}(x - 1)$$