

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 Gruppe B (MO, 07.05.2018) *(mit Lösung)*

— Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i> <input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

• **Aufgabe 1.**

a) Zeigen Sie, dass folgende Funktionen bei $(x, y) = (0, 0)$ nicht stetig sind:

a): 3 P.

$$h(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{y + 2x^3} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad g(x, y) := \begin{cases} \frac{2x^5 - y^3}{(x^3 + y^3)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Für h setze z.B. $y = 0$, dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Für g setze z.B. $y = x$, dann gilt:

$$\lim_{y=x \rightarrow 0} g(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 - 3x^3}{(x^3 + x^3)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 - 3x^3}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3}{x^3} \rightarrow \infty \neq 0.$$

b) Wo ist folgende Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig?

b): 1,5 P.

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 + y^2x + x^2y + y^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^2x + x^2y + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)(x + y)}{x^2 + y^2} = x + y$$

Als Polynom ist f somit überall stetig.

- c) Berechne die Richtungsableitung von f aus dem vorherigen Unterpunkt in Richtung (v, w) mit $v^2 + w^2 = 1$, an der Stelle $(0, 0)$. c): 1,5 P.

Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Richtungsableitung.

$$\partial_{(v,w)}f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h \cdot (v,w)) - f(0,0)}{h}.$$

$$\partial_{(v,w)}f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((hv, hw)) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hv + hw}{h} = v + w.$$

Alternativ:

$$\partial_{(v,w)}f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = v + w$$

• **Aufgabe 2.**

a) Wo besitzt die Funktion $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ im V. Oktanten ($x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0$) gelegenen Teil des Ellipsoids

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

ihr Maximum? Ermitteln Sie diese mittels Lagrangemultiplikatormethode!

a): 3 P.

Lagrangemethode:

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2y^2z^2 + \lambda(x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2z^2 + 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow x(y^2z^2 + \lambda) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2yz^2 + \frac{2}{9}\lambda y = 0 \Leftrightarrow y\left(x^2z^2 + \frac{\lambda}{9}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2x^2y^2z + \frac{1}{2}\lambda z = 0 \Leftrightarrow z\left(x^2y^2 + \frac{\lambda}{4}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

Für $x = 0$ folgt, $y = 0$ und $z = 0$. Aber an $P=(0, 0, 0)$ ist die NB nicht erfüllt!

Aus $\lambda = 0$ folgt, dass $x = y$ und $z = 0$, $x = z$ und $y = 0$, sowie $y = z$ und $x = 0$, wobei aufgrund der Vorzeichen der NB (V. Oktant) nur $x = y$ und $z = 0$ erfüllt ist. Dieser Punkt $f(x, y, 0)$ kann aufgrund von $f(x, y, z) \geq 0 \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ nur ein Minimum sein.

Sei nun $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $z \neq 0$, so folgt aus den obigen Gleichung:

$$-\lambda = y^2z^2 = 9x^2z^2 = 4x^2y^2$$

Setzt man nun in die letzte Gleichung ein ergibt sich:

$$x^2 + x^2 + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \text{ und da } x \geq 0 \Rightarrow x = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow z = -\frac{2}{\sqrt{3}}, y = +\frac{3}{\sqrt{3}} = +\sqrt{3}$$

An diesem Punkt gilt:

$$f\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, +\sqrt{3}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3}$$

Somit besitzt $f(x, y, z)$ an diesem Punkt ein Maximum.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = y^5 + x^4 - 4xy - 11y + 2$$

Man soll zeigen, dass $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (2, 1)$ lokal nach $x = x(y)$ auflösbar ist!
b): 1 P.

i) $f(2, 1) = 0$ ist erfüllt

ii) Alle Partiellen Ableitung sind in einer Umgebung von $(2, 1)$ stetig

$$f_y = 5y^4 - 4x - 11 \quad \text{und} \quad f_x = 4x^3 - 4y$$

iii) Weiters gilt $f_x(2, 1) = 32 - 4 = 28 \neq 0$

Da alle Bedingungen des Hauptsatzes über implizite Funktionen erfüllt sind, gilt:
 f ist in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (2, 1)$ lokal nach $x = x(y)$ auflösbar!

c) Berechnen Sie für die Funktion $x = x(y)$ das Taylorpolynom 1. Grades um die Stelle $(x_0, y_0) = (2, 1)$ durch implizites Differenzieren!
c): 2 P.

$$T(y) \approx x(y_0) + x'(y_0)(y - y_0) \quad \text{mit} \quad x(y_0) = 2$$

$$f(x(y), y) = 0 \Rightarrow f_y + f_x \cdot x' = 0 \Rightarrow x'(y) = -\frac{f_y}{f_x} = -\frac{5y^4 - 4x - 11}{4x^3 - 4y}$$

$$\Rightarrow x'(1) = -\frac{5 - 8 - 11}{32 - 4} = \frac{1}{2}$$

Dadurch ergibt sich für das Taylorpolynom:

$$T(y) \approx 2 + \frac{1}{2}(y - 1)$$

• **Aufgabe 3.**

- a) Gegeben sei das Skalarfeld $f : [0, \pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) = \cos(x + y) \sin(x - y)$.
Zeigen Sie, dass der Gradient folgende Form besitzt:

$$\begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -\cos(2y) \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie anschließend die Hesse Matrix von f in einem Punkt (x, y) . a): 1,5 P.

Hinweis: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x + y) \cos(x - y) - \sin(x + y) \sin(x - y) \\ -(\cos(x + y) \cos(x - y) + \sin(x + y) \sin(x - y)) \end{pmatrix} = [\textit{Hinweis}] = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -\cos(2y) \end{pmatrix}$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -2 \sin(2x) & 0 \\ 0 & 2 \sin(2y) \end{pmatrix}$$

- b) Entwickeln Sie f in ein quadratisches Taylor-Polynom um den Punkt $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12})$. Berechnen Sie die dabei auftretenden Matrix-Vektor- und Vektor-Vektor-Multiplikationen explizit. Vereinfachen des Polynoms nicht notwendig. b): 1 P.

Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$T(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^T H(f)(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{4} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{6} \\ x - \frac{\pi}{12} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{6} \\ x - \frac{\pi}{12} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{6} \\ x - \frac{\pi}{12} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{4} + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{12} \right) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \left(x - \frac{\pi}{6} \right)^2 - \left(x - \frac{\pi}{12} \right)^2 \right)
\end{aligned}$$

- c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f in $[0, \pi] \times [0, \pi]$.
 Geben Sie an, ob f an diesen Punkten elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist.
 Handelt es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte?

c): 3,5 P.

Hinweis: Achtung: Ist $x, y \in [0, \pi] \Rightarrow 2x, 2y \in [0, 2\pi]$

Es muss erfüllt sein:

$$\nabla f(x, y) = 0 = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ -\cos(2y) \end{pmatrix}$$

Durch lösen des Gleichungssystems ergeben sich folgende Punkte, sowie die dazugehörige Hesse Matrix. Durch das Hauptminorenkriterium ergibt sich die Art des Punktes:

$$\begin{aligned}
P1 : Hf\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
P2 : Hf\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\
P3 : Hf\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
P4 : Hf\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

P3 und P4 sind elliptische Punkte, P1 und P2 hyperbolische.
 P4 ist ein Maximum, P3 ein Minimum. P1 und P2 sind Sattelpunkte.

