Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2018

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 2 Gruppe B (FR, 15.06.2018) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

Sei M ein Unterraum des Hilbertraums l^2 der quadratisch summierbaren Folgen, aufgespannt durch die drei Folgen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$\varphi_1 = (1,\ 1/8,\ 1/27,\ 1/64,\ 1/125, ...), \quad \varphi_2 = (0,0,1,0,0,0,...), \quad \varphi_3 = (9,0,0,0,0,0,...).$$

Hinweis: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.2021, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$

a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ aus l^2 sind und berechnen Sie eine Orthonormalbasis für M.

Die Folgen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sind aus l^2 da:

$$||\varphi_1||_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad ||\varphi_2||_2^2 = 1, \quad ||\varphi_3||_2^2 = 81,$$

allesamt endlich und damit aus l^2.
Berechne nun eine Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ von M. Da φ_2 normiert ist, setze $b_1 := \varphi_2$. Nun sind φ_2 und φ_3, bereits orthogonal aufeinander, wähle also als $\hat{b}_2 := \varphi_3$. Durch normieren erhält man $b_2 = (1,0,0,0,0,0,...)$. Fehlt noch b_3:

$$\hat{b}_3 = \varphi_1 - \frac{\langle \varphi_1, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2 - \frac{\langle \varphi_1, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1.$$

$$\langle \varphi_1, b_2 \rangle = 1, \quad \langle \varphi_1, b_1 \rangle = 1/27, \quad \langle b_1, b_1 \rangle = \langle b_2, b_2 \rangle = 1.$$

$$\begin{aligned}\hat{b}_3 &= (1,\ 1/8,\ 1/27,\ 1/64,\ 1/125, ...) - (1,0,0,0,0,...) - (0,0,1/27,0,0,0...)\\ &= (0,\ 1/8,\ 0,\ 1/64,\ 1/125, ...).\end{aligned}$$

Normieren: $||\hat{b}_3||_2^2 = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} - 1 - 1/3^6 = \frac{27\pi^6 - 25515 - 35}{35 \cdot 3^6} = \frac{27\pi^6 - 25480}{25515}$, daher

$$b_3 = \sqrt{\frac{25515}{27\pi^6 - 25480}} (0,\ 1/8,\ 0,\ 1/64,\ 1/125, ...).$$

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $x = (1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/5, ...)$ nicht aus M ist und berechnen Sie die Orthogonalprojektion $\tilde{x}$ von x auf M.

Angenommen x wäre aus M, also x ist durch eine Linearkombination von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ darstellbar:

$$x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3.$$

$$\begin{aligned}(1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/5, ...) &= c_1(1,\ 1/8,\ 1/27,\ 1/64,\ 1/125, ...)\\ &\quad + c_2(0, 0, 1, 0, 0, 0, ...) + c_3(9, 0, 0, 0, 0, 0, ...).\end{aligned}$$

Aus der zweiten Koordinate folgt $c_1 = 4$, hingegen aus der vierten Koordinate folgt $c_1 = 16$, Widerspruch, somit kann x nicht in M sein.
Die Orthogonalprojektion ist gegeben durch $\tilde{x} = \langle x, b_1\rangle b_1 + \langle x, b_2\rangle b_2 + \langle x, b_3\rangle b_3$, dabei ist $\langle x, b_1\rangle = 1/3$ und $\langle x, b_2\rangle = 1$ und

$$\langle x, b_3\rangle = \sqrt{\frac{25515}{27\pi^6 - 25480}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} - 1 - 1/3^4\right) = \sqrt{\frac{25515}{27\pi^6 - 25480}}\frac{9\pi^4 - 810 - 10}{810}.$$

$$\tilde{x} = (1,0,0,0,0,...) + (0,0,1/3,0,0,0,...) + \frac{25515}{27\pi^6 - 25480}\frac{9\pi^4 - 820}{810}(0,\ 1/4,\ 0,\ 1/16,\ 1/25,...)$$
$$= (1,0,0,0,0,...) + (0,0,1/3,0,0,0,...) + \frac{63}{2} \cdot \frac{9\pi^4 - 820}{\pi^6 - 25480}(0,\ 1/4,\ 0,\ 1/16,\ 1/25,...).$$

c) (1 Punkt) Berechnen Sie den Fehler der Bestapproximation $\tilde{x}$ zum Original x in der Norm von l^2!

Der Fehler $||x - \tilde{x}||_2$ ist gegeben durch:

$$||x - \tilde{x}||_2^2 = ||x||_2^2 - \left(\langle x, b_1\rangle^2 + \langle x, b_2\rangle^2 + \langle x, b_3\rangle^2\right).$$

Da $||x||_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ folgt:

$$||x - \tilde{x}||_2^2 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{9} - 1 - \frac{25515}{27\pi^6 - 25480}\left(\frac{9\pi^4 - 820}{810}\right)^2 \approx 0.2721.$$

Also

$$||x - \tilde{x}||_2 \approx 0.5216.$$

• **Aufgabe 2.**
Zur approximativen Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist die Picard-Iteration ein nützliches Werkzeug. Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem, gegeben durch die Differentialgleichung

$$x'(t) = 3 \cdot x(t)^2 \tag{1}$$

und den Startwert $x(0) = 1$.

a) (1 Punkt) Schreiben Sie die Differentialgleichung in eine dazu äquivalente Integralgleichung um.

Beidseitige Integration der Gleichung $x' = f(x(t), t)$ nach t liefert

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s), s) ds.$$

Dabei ist $x(0) = 1$ und $f(x(s), s) = ax(s)^2$. Demnach lautet die gesuchte äquivalente Integralgleichung

$$x(t) = 1 + 3 \int_0^t x(s)^2 ds.$$

b) (2 Punkte) Führen Sie eine Picarditeration für die ersten Schritte x_1, x_2 durch.

Es soll nun die gefragte Picard - Iteration durchgeführt werden. Zu Beginn wird der Startwert $x_0(s) = 1$ für x eingesetzt.

$$x_1(t) = x(0) + 3 \int_0^t (x_0(s))^2 \; ds = 1 + 3 \int_0^t 1 \; ds = 1 + 3t.$$

Dieses Ergebnis wird nun in den zweiten Iterationsschritt für x eingesetzt.

$$\begin{aligned} x_2(t) = \quad & x(0) + 3 \textstyle\int_0^t (x_1(s))^2 \; ds = 1 + 3 \int_0^t \left(1 + 2 \cdot 3s + 3^2 s^2\right) ds \\ = \quad & 1 + 3t + 9t^2 + \tfrac{27t^3}{3} = 1 + 3t + (3t)^2 + \tfrac{1}{3}(3t)^3. \end{aligned}$$

Die jeweils in Potenzen von $3t$ angeschriebenen Zeilen dienen zur besseren Vergleichbarkeit mit Unterpunkt d) und sind für eine volle Punktezahl bei dieser Teilaufgabe selbstverständlich nicht erforderlich.

c) (1,5 Punkt) Lösen Sie nun die Differentialgleichung (1) mit dem Startwert $x(0) = 1$ direkt.

Die Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden.

$$\frac{dx}{dt} = x' = 3x^2 \Leftrightarrow \int \frac{1}{x^2}\, dx = \int 3\, dt.$$

Beidseitiges Ausintegrieren und Auflösen nach x liefert

$$x(t) = -\frac{1}{3t + c}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung und Bestimmen der Konstante c führt schlussendlich zu

$$x(t) = \frac{1}{1 - 3t}.$$

d) (1,5 Punkt) Nutzen Sie die exakte Lösung aus c), um eine Reihendarstellung der Lösung auf $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ zu finden. Ist damit Ihre Iteration aus b) plausibel?
Hinweis: *Möglicherweise ist eine Ihnen gut bekannte Reihe nützlich.*

Das Ergebnis aus c) lautet $x(t) = \frac{1}{1-3t}$. Ist $t \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, wie angegeben, so ist dies gerade das Ergebnis der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3t)^n = \frac{1}{1 - 3t}.$$

Demnach liegt der Verdacht nahe, dass die Iteration aus b) für $t \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ gegen $\sum_{n=0}^{\infty} (3t)^n = 1 + 3t + (3t)^2 + (3t)^3 + ...$ konvergiert. Dies ist in guter Übereinstimmung mit den ersten Termen der Iterationsschritte aus b).

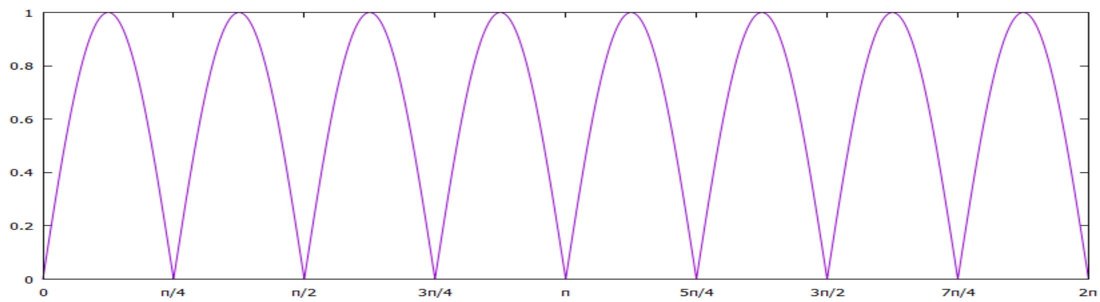
Anmerkung: Auf $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ konvergiert die Picarditeration tatsächlich gegen die exakte Lösung.

- **Aufgabe 3.**

Gegeben sei folgende Funktion

$$f(x) = |\sin(4x)|.$$

a) (1,5 Punkte) Skizzieren Sie $f(x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ und ermitteln Sie daraus die Periodenlänge T.



Die Periodenlänge ist $T = \frac{\pi}{4}$

b) (3,5 Punkte) Entwickeln Sie $f(x)$ in eine Fourierreihe.

Hinweis: *Benützen Sie zur Lösung der Integrale den Summensatz,*
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$.

Im Allgemeinen besitzt die Fourierentwicklung folgende Gestalt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)\right).$$

Da $f(x)$ eine gerade Funktion mit Periode $\frac{\pi}{4}$ ist gilt $b_k = 0$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(8kx)) \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x)\cos(8kx)dx,$$

$$\sin(4x)\cos(8kx) = \frac{1}{2}(\sin(4-8k)x + \sin(4+8k)x) = \frac{1}{2}(\sin(8k+4)x - \sin(8k-4)x)$$

$$a_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(8k+4)xdx - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(8k-4)xdx =$$

$$= -\frac{4\cos(8k+4)x}{\pi(8k+4)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{4\cos(8k-4)x}{\pi(8k-4)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\pi(8k+4)} - \frac{8}{\pi(8k-4)} =$$

$$= -\frac{4}{\pi(2k+1)(2k-1)}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{4}{\pi} \quad \Rightarrow \quad f(x) = |\sin(4x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \cos(8kx)$$

c) (1 Punkt) Untersuchen Sie die Fourierreihe aus b) auf *punktweise* und *gleichmäßige* Konvergenz. (Beantworten und begründen Sie also an welchen Stellen die Fourierreihe gegen die ursprüngliche Funktion konvergiert, punktweise beziehungsweise gleichmäßig, und wo nicht).

- *Punktweise:* Die Funktion erfüllt die Voraussetzungen des Dirichlet-Kriteriums (beschränkt, $2\pi-$periodisch, bis auf endlich viele Sprungstellen stetig differenzierbar). Das heißt die Fourierreihe konvergiert punktweise gegen

  $$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

  Da $f(x)$ stetig ist, ist $f(x+) = f(x-)$, das heißt also die Fourierreihe konvergiert überall punktweise gegen die ursprüngliche Funktion $f(x)$.

- *Gleichmäßig:* Da $f(x)$ stetig ist, 2π-periodisch und stetig differenzierbar abgesehen von (im Intervall $[-\pi, \pi]$ endlich vielen Sprungstellen, ist der Satz aus dem Skriptum zur gleichmäßigen Konvergenz von Fourierreihen anwendbar und somit konvergiert die Fourierreihe auf dem ganzen Definitionsbereich gleichmäßig gegen $f(x)$.