Aufgabe 1 (Extremwert) (Version A)

Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ im III. Oktanten $(x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0)$ des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{27} + \frac{z^2}{12} = 1$$

mithilfe der Lagrangemultiplikatormethode.
Hinweis: Überlegen Sie warum Punkte für die gilt $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$ kein Maximum sein können und beachten Sie welche Werte x, y und z im III. Oktanten annehmen dürfen.

Aufgabe 1 (Extremwert) (Version B)

Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ im III. Oktanten $(x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0)$ des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$$

mithilfe der Lagrangemultiplikatormethode.
Hinweis: Überlegen Sie warum Punkte für die gilt $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$ kein Maximum sein können und beachten Sie welche Werte x, y und z im III. Oktanten annehmen dürfen.

Aufgabe 1 (Extremwert) (Version C)

Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ im III. Oktanten $(x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0)$ des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{27} = 1$$

mithilfe der Lagrangemultiplikatormethode.
Hinweis: Überlegen Sie warum Punkte für die gilt $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$ kein Maximum sein können und beachten Sie welche Werte x, y und z im III. Oktanten annehmen dürfen.

$f(x,y,z) = x^2y^2z^2$

$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} - 1 = 0$

$\nabla f + \lambda \nabla \varphi = 0$

$$\begin{pmatrix} 2xy^2z^2 \\ 2x^2yz^2 \\ 2x^2y^2z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2\frac{x}{\alpha} \\ 2\frac{y}{\beta} \\ 2\frac{z}{\gamma} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} x\left(y^2z^2 + \frac{\lambda}{\alpha}\right) &= 0 \\ y\left(x^2z^2 + \frac{\lambda}{\beta}\right) &= 0 \\ z\left(x^2y^2 + \frac{\lambda}{\gamma}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Da $f(x,y,z) \geq 0$ ist kann kein Punkt x, y oder $z = 0$ ein Maximum sein. $\rightarrow$ Also $z, x, y \neq 0$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} \lambda &= -\alpha \; y^2z^2 \\ \lambda &= -\beta \; x^2z^2 \\ \lambda &= -\gamma \; x^2y^2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} y^2 &= x^2\frac{\beta}{\alpha} \\ z^2 &= y^2\frac{\gamma}{\beta} = x^2\frac{\gamma}{\alpha} \end{aligned}$$

$\rightarrow \varphi(x,y,z) = 0 = \frac{x^2}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha} - 1$

$3x^2 = \alpha$

$x^2 = \frac{\alpha}{3}$

$x = -\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$, da $x \leq 0$

daher $y^2 = +\frac{\alpha}{3}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{3} \rightarrow y = -\sqrt{\frac{\beta}{3}}$

$z^2 = \frac{\beta}{3}\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{3} \rightarrow z = +\sqrt{\frac{\gamma}{3}}$

$f\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{3}}, -\sqrt{\frac{\beta}{3}}, \sqrt{\frac{\gamma}{3}}\right) = \frac{\alpha\beta\gamma}{27}$

<u>Gruppen:</u> (A) $\alpha = 3, \beta = 27, \gamma = 12 \longrightarrow f(-1,-3,2) = 36$

(B) $\alpha = 27, \beta = 12, \gamma = 3 \longrightarrow f(-3,-2,1) = 36$

(C) $\alpha = 12, \beta = 3, \gamma = 27 \longrightarrow f(-2,-1,3) = 36$

1. Test Analysis 2 SS2020 Beispiel Richtungsableitung

Version A

1. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Richtungsdifferenzierbarkeit im Punkt (0,0).

   $f(x,y) := \frac{5xy^4+2y^6-4x^3y^2}{3\sqrt{2}x^4+2y^6}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) := 0$

2. Sollte die Richtungsableitung von f für die Richtung $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ im Punkt (0,0) existieren, berechnen sie deren Wert. Geben Sie den entsprechenden Wert auf 2 Nachkommastellen gerundet an.

Version B

1. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Richtungsdifferenzierbarkeit im Punkt (0,0).

   $f(x,y) := \frac{2x^6y+8x^8-x^4y^3}{7x^8+4\sqrt{2}y^6}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) := 0$

2. Sollte die Richtungsableitung von f für die Richtung $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ im Punkt (0,0) existieren, berechnen sie deren Wert. Geben Sie den entsprechenden Wert auf 2 Nachkommastellen gerundet an.

Version C

1. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Richtungsdifferenzierbarkeit im Punkt (0,0).

   $f(x,y) := \frac{2xy^2-5y^4-x^2y}{y^4+2\sqrt{2}x^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) := 0$

2. Sollte die Richtungsableitung von f für die Richtung $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ im Punkt (0,0) existieren, berechnen sie deren Wert. Geben Sie den entsprechenden Wert auf 2 Nachkommastellen gerundet an.

Lösungen Beispiel Richtungsableitung

Version A

Mit $v := (u,w)^T, \parallel v \parallel = 1$ gilt (Definition der Richtungsableitung):

- $u \neq 0$:

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu,hw)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{5h^5uw^4 + 2h^6w^6 - 4h^5u^3w^2}{3\sqrt{2}h^4u^4 + 2h^6w^6} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^5(5uw^4 + 2hw^6 - 4u^3w^2)}{h^5(3\sqrt{2}u^4 + 2h^2w^6)} = \frac{5uw^4 - 4u^3w^2}{3\sqrt{2}u^4}$$

- $u = 0$:

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,hw)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{2h^6w^6}{2h^6w^6} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \to \infty$$

Für die Funktion f existieren daher im Punkt (0,0) nicht alle Richtungsableitungen und f ist somit nicht richtungsdifferenzierbar. Für die Richtung $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ergibt sich

$$\partial_{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})} f(0,0) = \frac{1}{6} = 0,1\dot{6} \approx 0,17$$

Version B

Mit $v := (u,w)^T, \parallel v \parallel = 1$ gilt (Definition der Richtungsableitung):

- $w \neq 0$:

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu,hw)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{2h^7u^6w + 8h^8u^8 - h^7u^4w^3}{7h^8u^8 + 4\sqrt{2}h^6w^6} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^7(2u^6w + 8hu^8 - u^4w^3)}{h^7(7h^2u^8 + 4\sqrt{2}w^6)} = \frac{2u^6w - u^4w^3}{4\sqrt{2}w^6}$$

- $w = 0$:

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hu,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{8h^8u^8}{7h^8u^8} = \frac{8}{7} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \to \infty$$

Für die Funktion f existieren daher im Punkt (0,0) nicht alle Richtungsableitungen und f ist somit nicht richtungsdifferenzierbar. Für die Richtung $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ergibt sich

$$\partial_{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})} f(0,0) = \frac{1}{8} = 0,125 \approx 0,13$$

Version C

Mit $v := (u, w)^T, \parallel v \parallel = 1$ gilt (Definition der Richtungsableitung):

- $u \neq 0$:

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(hu, hw) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{2h^3uw^2 - 5h^4w^4 - h^3u^2w}{h^4w^4 + 2\sqrt{2}h^2u^2} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^3(2uw^2 - 5hw^4 - u^2w)}{h^3(h^2w^4 + 2\sqrt{2}u^2)} = \frac{2uw^2 - u^2w}{2\sqrt{2}u^2}$$

- $u = 0$:

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, hw) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{-5h^4w^4}{h^4w^4} = -5 \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \to -\infty$$

Für die Funktion f existieren daher im Punkt (0,0) nicht alle Richtungsableitungen und f ist somit nicht richtungsdifferenzierbar. Für die Richtung $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ergibt sich

$$\partial_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})} f(0,0) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Testbeispiel Taylorpolynom Gruppe A

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 - 2y^3$$

in ihr Taylorpolynom 2. Grades T_2 im Punkt $(0,1)$ und berechnen Sie den Fehler $T_2 - f(x,y)$ in den Punkten $(1,2)$ und $(2,1)$.

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4xy^2 \\ -4x^2y - 6y^2 \end{pmatrix} \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4y^2 & -8xy \\ -8xy & -4x^2 - 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad H_f(0,1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_2(h,k) &= f(0,1) + f_x(0,1)h + f_y(0,1)k + \frac{1}{2}\left(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2\right) \\ &= -2 - 6k - 2h^2 - 6k^2 \end{aligned}$$

Fr den Punkt $(1,2)$ erhalten wir

$$f(0,1) = -2 \qquad \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(1,2) = -23 \qquad T_2(1,1) = -2 - 6 + \frac{1}{2}(-4 - 12) = -16$$

$$\Delta(1,2) = T_2(1,1) - f(1,2) = 7$$

Fr den Punkt $(2,1)$ erhalten wir

$$f(0,1) = -2 \qquad \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(2,1) = 6 \qquad T_2(2,0) = -2 - 8 = -10$$

$$\Delta(2,1) = T_2(2,0) - f(2,1) = -16$$

Testbeispiel Taylorpolynom Gruppe B

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y) = -2x^3 - 2x^2y^2 + y^4$$

in ihr Taylorpolynom 2. Grades T_2 im Punkt $(1,0)$ und berechnen Sie den Fehler $T_2 - f(x,y)$ in den Punkten $(1,2)$ und $(2,1)$.

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x^2 - 4xy^2 \\ -4y^3 - 4x^2y \end{pmatrix} \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x - 4y^2 & -8xy \\ -8xy & 12y^2 - 4x^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} f(0,1) = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H_f(0,1) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_2(h,k) &= f(0,1) + f_x(0,1)h + f_y(0,1)k + \frac{1}{2}\left(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2\right) \\ &= -2 - 6h - 6h^2 - 2k^2 \end{aligned}$$

Fr den Punkt $(1,2)$ erhalten wir

$$f(1,0) = -2 \qquad \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(1,2) = 6 \qquad T_2(0,2) = -2 - 8 = -10$$

$$\Delta(1,2) = T_2(0,2) - f(1,2) = -16$$

Fr den Punkt $(2,1)$ erhalten wir

$$f(0,1) = -2 \qquad \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(2,1) = -23 \qquad T_2(1,1) = -2 - 6 + \frac{1}{2}(-4 - 12) = -16$$

$$\Delta(2,1) = T_2(1,1) - f(2,1) = 7$$

Testbeispiel Taylorpolynom Gruppe C

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^3y + x^2 - 3xy - y^5$$

in ihr Taylorpolynom 2. Grades T_2 im Punkt $(-1,1)$ und berechnen Sie den Fehler $T_2 - f(x,y)$ in den Punkten $(-2,0)$ und $(0,2)$.

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^2y + 2x - 3y \\ x^3 - 3x - 5y^4 \end{pmatrix} \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy + 2 & 3x^2 - 3 \\ 3x^2 - 3 & -20y^3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} f(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T_2(h,k) &= f(0,1) + f_x(0,1)h + f_y(0,1)k + \frac{1}{2}\left(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2\right) \\ &= 2 - 2h - 3k - 2h^2 - 10k^2 \end{aligned}$$

Fr den Punkt $(-2,0)$ erhalten wir

$$f(-1,1) = 2 \qquad \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(-2,0) = 4 \qquad T_2(-1,-1) = 2 + 2 + 3 - 2 - 10 = -5$$

$$\Delta(-2,0) = T_2(-1,-1) - f(-2,0) = -9$$

Fr den Punkt $(0,2)$ erhalten wir

$$f(-1,1) = 2 \qquad \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(0,2) = -32 \qquad T_2(1,1) = 2 - 2 - 3 - 2 - 10 = -15$$

$$\Delta(0,2) = T_2(1,1) - f(0,2) = 17$$