Version 1

1. Bestimmen Sie die trigonometrische Fourierreihe der periodischen Fortsetzungen der Funktion $f(x) = x\cos(x)$ mit $x \in (-\pi, \pi]$. Geben Sie weiters die Werte der Koeffizienten a_0 und b_1 numerisch mit 2 Nachkommastellen an.

2. Nutzen Sie dieses Ergebnis aus um einen Wert für die Summe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2-1)^2}$ zu bestimmen, numerische Eingabe mit 2 Nachkommastellen.

Hinweise:

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$, $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$,
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

$\int_0^{\pi} dx x \sin(ax) = (-1)^{a+1}\frac{\pi}{a}$ $\quad \int_0^{\pi} dx x^2 \cos^2(ax) = \frac{\pi}{4a^2} + \frac{\pi^3}{6}$ mit $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

Version 2

1. Bestimmen Sie die trigonometrische Fourierreihe der periodischen Fortsetzungen der Funktion $f(x) = 2x\cos(2x)$ mit $x \in (-\pi, \pi]$. Geben Sie weiters die Werte der Koeffizienten a_0 und b_2 numerisch mit 2 Nachkommastellen an.

2. Nutzen Sie dieses Ergebnis aus um einen Wert für die Summe $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2-4)^2}$ zu bestimmen, numerische Eingabe mit 2 Nachkommastellen.

Hinweise:

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$, $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$,
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

$\int_0^{\pi} dx x \sin(ax) = (-1)^{a+1}\frac{\pi}{a}$ $\quad \int_0^{\pi} dx x^2 \cos^2(ax) = \frac{\pi}{4a^2} + \frac{\pi^3}{6}$ mit $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

Version 3

1. Bestimmen Sie die trigonometrische Fourierreihe der periodischen Fortsetzungen der Funktion $f(x) = 3x\cos(3x)$ mit $x \in (-\pi, \pi]$. Geben Sie weiters die Werte der Koeffizienten a_0 und b_3 numerisch mit 2 Nachkommastellen an.

2. Nutzen Sie dieses Ergebnis aus um einen Wert für die Summe $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2-9)^2}$ zu bestimmen, numerische Eingabe mit 2 Nachkommastellen.

Hinweise:

$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$, $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$,

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

$\int_0^\pi dx x \sin(ax) = (-1)^{a+1}\frac{\pi}{a} \quad \int_0^\pi dx x^2 \cos^2(ax) = \frac{\pi}{4a^2} + \frac{\pi^3}{6}$ mit $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

1) $f(x) = \alpha x \cos(\alpha x)$ ungerade $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{Vers. A} \\ 2 & \text{Vers. B} \\ 3 & \text{Vers. C} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \alpha x \cos(\alpha x)\sin(nx)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\pi} dx \quad x\left[\sin((n+\alpha)x) + \underbrace{\sin((n-\alpha)x)}_{=0 \text{ für } n=\alpha}\right]$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\left[(-1)^{n+\alpha+1}\frac{\pi}{n+\alpha} + \underbrace{(-1)^{n+\alpha+1}\frac{\pi}{n-\alpha}}_{\text{nur für } n\neq\alpha}\right]$$

$$= \alpha(-1)^{n+\alpha+1}\begin{cases}\left(\frac{1}{n+\alpha} + \frac{1}{n-\alpha}\right) & n\neq\alpha \\ \frac{1}{n+\alpha} & n=\alpha\end{cases} = \begin{cases}(-1)^{n+\alpha+1}\frac{2n\alpha}{n^2-\alpha^2} & n\neq\alpha \\ -\frac{1}{2} & n=\alpha\end{cases}$$

$\Rightarrow$ A: $\alpha = 1$ $\quad b_1 = -\frac{1}{2} = -0{,}50$

B: $\alpha = 2$ $\quad b_2 = -\frac{1}{2} = -0{,}50$

C: $\alpha = 3$ $\quad b_3 = -\frac{1}{2} = -0{,}50$

$$\alpha x\cos(\alpha x) \sim -\frac{1}{2}\sin(\alpha x) + \sum_{\substack{n=1\\n\neq\alpha}}^{\infty}(-1)^{n+\alpha+1}\frac{2n\alpha}{n^2-\alpha^2}\sin(nx)$$

2) Parseval: $\frac{1}{\pi}\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$

$$\underline{\frac{1}{\pi}\|f\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\alpha^2x^2\cos^2(\alpha x)\,dx = \frac{2\alpha^2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos^2(\alpha x)\,dx = \frac{2\alpha^2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4\alpha^2} + \frac{\pi^3}{6}\right] =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{\pi^2\alpha^2}{3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\pi^2\alpha^2}{3} = \frac{1}{4} + 4\alpha^2\sum_{n=1}^{\alpha-1}\frac{n^2}{(n^2-\alpha^2)^2} + 4\alpha^2\sum_{n=\alpha+1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^2-\alpha^2)^2}$$

$$\Rightarrow S = \sum_{n=\alpha+1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^2-\alpha^2)^2} = \frac{1}{16\alpha^2} + \frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{\alpha-1}\frac{n^2}{(n^2-\alpha^2)^2}$$

A: $S = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{16} \simeq 0{,}88$

B: $S = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{64} - \frac{1}{9} \simeq 0{,}73$

C: $S = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{16\cdot 9} - \frac{1}{64} - \frac{4}{25} \simeq 0{,}65$

Aufgabe zu komplexen Zahlen (Version A)

a) Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche die Folgende Gleichung für $a \in \mathbb{Z}$ erfüllen

$$e^{2\pi z} = -(1 + 2\cos(\pi(1-a))).$$

Geben Sie weiters den Realteil von z für $a = 14159$ auf zwei Nachkommastellen genau an.
Hinweis: Gegebenenfalls ist eine Fallunterscheidung notwendig.

b) Kreuzen Sie jene Aussage an, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und begründen Sie Ihre Antwort (evtl. mit einer kurzen Rechnung).

- ☐ $\sin(ix) = \sinh(x)$
- ☐ $\sin(ix) = i\sinh(x)$
- ☐ $\sin(ix) = \cosh(x)$
- ☐ $\sin(ix) = i\cosh(x)$
- ☐ $\sin(ix) = \sin(x)$
- ☐ $\sin(ix) = i\sin(x)$
- ☐ $\sin(ix) = \cos(x)$
- ☐ $\sin(ix) = i\cos(x)$

c) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil der Hauptäste folgender Ausdrücke auf zwei Kommastellen genau.

i) $\ln(\frac{1+i}{1-i})$
ii) 2^i

Aufgabe zu komplexen Zahlen (Version B)

a) Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche die Folgende Gleichung für $a \in \mathbb{Z}$ erfüllen

$$e^{3\pi z} = -(1 + 2\cos(\pi(1-a))).$$

Geben Sie weiters den Realteil von z für $a = 6535$ auf zwei Nachkommastellen genau an.
Hinweis: Gegebenenfalls ist eine Fallunterscheidung notwendig.

b) Kreuzen Sie jene Aussage an, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und begründen Sie Ihre Antwort (evtl. mit einer kurzen Rechnung).

- ☐ $\cos(ix) = \sinh(x)$
- ☐ $\cos(ix) = i\sinh(x)$
- ☐ $\cos(ix) = \cosh(x)$
- ☐ $\cos(ix) = i\cosh(x)$
- ☐ $\cos(ix) = \sin(x)$
- ☐ $\cos(ix) = i\sin(x)$
- ☐ $\cos(ix) = \cos(x)$
- ☐ $\cos(ix) = i\cos(x)$

c) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil der Hauptäste folgender Ausdrücke auf zwei Kommastellen genau.

i) $\ln(\frac{1-i}{1+i})$
ii) 3^i

Aufgabe zu komplexen Zahlen (Version C)

a) Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche die Folgende Gleichung für $a \in \mathbb{Z}$ erfüllen

$$e^{4\pi z} = -(1 + 2\cos(\pi(1-a))).$$

Geben Sie weiters den Realteil von z für $a = 79323$ auf zwei Nachkommastellen genau an.
Hinweis: Gegebenenfalls ist eine Fallunterscheidung notwendig.

b) Kreuzen Sie jene Aussage an, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und begründen Sie Ihre Antwort (evtl. mit einer kurzen Rechnung).

- ☐ $\sinh(x) = \sin(ix)$
- ☐ $\sinh(x) = -i\sin(ix)$
- ☐ $\sinh(x) = \cosh(ix)$
- ☐ $\sinh(x) = -i\cosh(ix)$
- ☐ $\sinh(x) = \sinh(ix)$
- ☐ $\sinh(x) = -i\sinh(ix)$
- ☐ $\sinh(x) = \cos(ix)$
- ☐ $\sinh(x) = -i\cos(ix)$

c) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil der Hauptäste folgender Ausdrücke auf zwei Kommastellen genau.

i) $\ln(\frac{-1+i}{1+i})$
ii) 4^i

a) $e^{\alpha\pi z} = -[1+2\cos(\pi(1-a))]$

$\alpha\pi z = \ln(-[1+2\cos(\pi(1-a))]) + 2\pi n i \quad , n \in \mathbb{Z}$

$= \underbrace{\ln|1+2\cos(\pi(1-a))|}_{= \begin{cases} a \text{ gerade: } \ln(1)=0 \\ a \text{ ungerade: } \ln(3) \end{cases}} + \underbrace{i \arg(-1+2\cos(\pi(1-a)))}_{= \begin{cases} a \text{ gerade: } 0 \\ a \text{ ungerade: } i\pi \end{cases}} + 2\pi n i$

$= \begin{cases} a \text{ gerade: } 2\pi n i \\ a \text{ ungerade: } \ln(3) + i\pi(2n+1) \end{cases}$

$\rightarrow z = \begin{cases} a \text{ gerade: } i\,\frac{2n}{\alpha} \\ a \text{ ungerade: } \frac{\ln(3)}{\alpha\pi} + i\,\frac{2n+1}{\alpha} \end{cases}$

(A) $a = 14159,\ \alpha = 2 \rightarrow Re(z) \approx 0{,}17$

(B) $a = 6535,\ \alpha = 3 \rightarrow Re(z) \approx 0{,}12$

(C) $a = 79323,\ \alpha = 4 \rightarrow Re(z) \approx 0{,}09$

b) $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \quad ; x \in \mathbb{R}$

$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{ix}}{2}$

(A),(B): $\sin(ix) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2i} = i\,\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = i\sinh(x)$

bzw. $\sinh(x) = -i\sin(ix)$

(C): $\cos(ix) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh(x)$

c) $\ln\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{1}+2i\cancel{-1}}{2}\right) = \ln(i) = i\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57i$

$\ln\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -\ln\left(\frac{1+i}{1-i}\right) =$ siehe (A) $= -i\frac{\pi}{2} \approx -1{,}57i$

$\ln\left(\frac{-1+i}{1+i}\right) = \ln\left(-\frac{1-i}{1+i}\right) = \ln(i) = i\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57i$

(A) $2^i = (e^{\ln(2)})^i = e^{i\ln(2)} = \cos(\ln(2)) + i\sin(\ln(2)) \approx 0{,}77 + i\,0{,}64$

(B) 3 3 3 3 3 $\approx 0{,}45 + i\,0{,}89$

(C) 4 4 4 4 4 $\approx 0{,}18 + i\,0{,}98$

Testbeispiel stationäre Punkte und Taylorpolynom Gruppe A

Gegeben sei das Skalarfeld

$$E(x,y) = (x^3 - 2x^2y)e^{-0.1y^2}$$

Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion. Welcher Art sind Sie

Tragen Sie die stationären Punkte in aufsteigender Reihenfolge der x-Werte (von Kleinstem zu Größtem) ein und wählen Sie deren Typ als Antwort aus.

Geben Sie numerische Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen genau ein.

$$\frac{\partial E}{\partial x} = (3x^2 - 4xy)e^{-0.1y^2}$$
$$\frac{\partial E}{\partial y} = (-2x^2 - 0.2x^3y + 0.4x^2y^2)e^{-0.1y^2}$$

$\vec{\nabla}E = 0$ liefert uns

$$x(3x - 4y) = 0 \implies x = 0;\ x = \frac{4}{3}y$$

$$x^2(-0.2xy + 0.4y^2 - 2) = 0 \implies \frac{2}{15}y^2 - 2 = 0 \implies y^2 = 15$$

Wir erhalten also folgende stationären Punkte:

$$(0,y),\ (\frac{4}{3}\sqrt{15}, \sqrt{15}),\ (-\frac{4}{3}\sqrt{15}, -\sqrt{15})$$

Die zweiten partiellen Ableitungen ergeben sich zu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (6x - 4y)e^{-0.1y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-0.2x^3 + 0.04x^3y^2 + 1.2x^2y - 0.08x^2y^3)e^{-0.1y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (-4x - 0.6x^2y + 0.8xy^2)e^{-0.1y^2}$$

Für die Schar an Punkten $(0,y)$ erhalten wir

$$\det \mathrm{H} = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$$

und daher lauter parabolische Punkte.
Für den Punkt $(4/3\sqrt{15}, \sqrt{15})$

$$\det \mathrm{H} = 21.24$$

mit positivem ersten Diagonaleintrag, daher einen elliptischen Punkt in Form eines Minimums.
Für den Punkt $(-4/3\sqrt{15}, -\sqrt{15})$ ergibt sich

$$\det \mathrm{H} = 21.24$$

mit negativem ersten Diagonaleintrag, daher einen elliptischen Punkt in Form eines Maximums.

Testbeispiel Taylorpolynom Gruppe B

Gegeben sei das Skalarfeld

$$E(x, y) = (x^3 + 2y^2)e^{-0.1x^2}$$

Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion. Welcher Art sind Sie

Tragen Sie die stationären Punkte in aufsteigender Reihenfolge der x-Werte (von Kleinstem zu Größtem) ein und wählen Sie deren Typ als Antwort aus.

Geben Sie numerische Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen genau ein.

$$\frac{\partial E}{\partial x} = (3x^2 - 0.2x^4 - 0.2xy^2)e^{-0.1x^2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 2ye^{-0.1x^2}$$

$\vec{\nabla}E = 0$ liefert uns

$$y = 0$$

$$x^2(3x^2 + 0.2x^2) = 0 \implies x = 0;\ 3 - 0.2x^2 = 0 \implies x^2 = 15$$

Wir erhalten also folgende stationären Punkte:

$$(0, 0),\ (\sqrt{15}, 0),\ (-\sqrt{15}, 0)$$

Die zweiten partiellen Ableitungen ergeben sich zu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (0.04x^5 - 1.4x^3 - 0.04x^2y^2 + 6x - 0.2y^2)e^{-0.1x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{-0.1yx^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -0.4xye^{-0.1x^2}$$

Für den Punkten $(0, 0)$ erhalten wir

$$\det \mathrm{H} = 0$$

und daher einen parabolischen Punkt.
Für den Punkt $(\sqrt{15}, 0)$

$$\det \mathrm{H} = -2.31$$

also einen hyperbolsichen Punkt.
Für den Punkt $(-\sqrt{15}, 0)$ ergibt sich

$$\det \mathrm{H} = 2.31$$

mit positivem ersten Diagonaleintrag, daher einen elliptischen Punkt in Form eines Minimums.

Testbeispiel Taylorpolynom Gruppe C

Gegeben sei das Skalarfeld

$$E(x, y) = (y^3 - 2xy^2)e^{-0.1x^2}$$

Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion. Welcher Art sind Sie

Tragen Sie die stationären Punkte in aufsteigender Reihenfolge der x-Werte (von Kleinstem zu Größtem) ein und wählen Sie deren Typ als Antwort aus.

Geben Sie numerische Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen genau ein.

$$\frac{\partial E}{\partial x} = (-2y^2 - 0,2xy^3 + 0,4x^2y^2)e^{-0.1x^2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = (3y^2 - 4xy)e^{-0.1x^2}$$

$\vec{\nabla} E = 0$ liefert uns

$$y(3y - 4x) = 0 \implies y = 0;\ y = \frac{4}{3}x$$

$$y^2(-0.2xy + 0.4x^2 - 2) = 0 \implies \frac{2}{15}x^2 - 2 = 0 \implies x^2 = 15$$

Wir erhalten also folgende stationären Punkte:

$$(x, 0),\ (\sqrt{15}, \frac{4}{3}\sqrt{15}),\ (-\sqrt{15}, -\frac{4}{3}\sqrt{15})$$

Die zweiten partiellen Ableitungen ergeben sich zu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-0.2y^3 + 0.04x^2y^3 + 1.2xy^2 - 0.08x^3y^2)e^{-0.1x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (6y - 4x)e^{-0.1x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (-4y - 0.6xy^2 + 0.8x^2y)e^{-0.1x^2}$$

Für die Schar an Punkten $(x, 0)$ erhalten wir

$$\det \mathrm{H} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

und daher lauter parabolische Punkte.
Für den Punkt $(\sqrt{15}, 4/3\sqrt{15})$

$$\det \mathrm{H} = 21.24$$

mit positivem ersten Diagonaleintrag, daher einen elliptischen Punkt in Form eines Minimums.
Für den Punkt $(-\sqrt{15}, -4/3\sqrt{15})$ ergibt sich

$$\det \mathrm{H} = 21.24$$

mit negativem ersten Diagonaleintrag, daher einen elliptischen Punkt in Form eines Maximums.