Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2021

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 Gruppe B (Fr, 26.04.2021) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

a) Betrachten Sie die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$ und g auf Stetigkeit im Punkt $(3,0,0)$.
Geben Sie weiters an, ob die betreffenden Funktionen total und stetig partiell differenzierbar im jeweiligen Punkt sind. *a): 3,0 P.*

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{3x^2+4y^4-x^2y}{x^3+2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y,z) := \begin{cases} \frac{x+y+z}{x^2+2xz+z^2} \sinh\left(\frac{x}{z}\right) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Hinweis: Wenn Sie vermuten, dass f unstetig in $(0,0)$ ist, reicht es eine Folge (x_n, y_n) zu konstruieren, für die $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \infty$ gilt. Analog für g.

- Wir beginnen mit f und setzen $y = 0$, während wir den Limes für $x \to 0$ betrachten.

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^3} = 3 \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \to \infty \neq 0.$$

Somit ist f nicht stetig an $(0,0)$ und daher auch weder total noch stetig partiell differenzierbar.

- Nun untersuchen wir g auf Stetigkeit im Punkt $(3,0,0)$. Wir setzen also $x = 3$ und $y = 0$ ein und erhalten

$$g(3,0,z) = \frac{3+z}{9+6z+z^2} \sinh\left(\frac{3}{z}\right) = \frac{1}{3+z} \sinh\left(\frac{3}{z}\right).$$

Wir betrachten $z := \frac{1}{\eta}$ im Limes $\eta \to \infty$ und bilden den Grenzwert

$$\lim_{\eta\to\infty} \frac{\sinh(3\eta)}{3+\frac{1}{\eta}} \to \infty \neq 0.$$

Die Funktion g ist daher im Punkt $(3,0,0)$ nicht stetig und daher weder total noch stetig partiell differenzierbar.

b) Betrachten Sie nun die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y) := \begin{cases} \frac{6x^3-3x^2y+8xy^2-4y^3}{3x^2+4y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Untersuchen Sie h auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$ und beantworten Sie die Frage, ob h total und stetig partiell differenzierbar ist.
Hinweis: Durch geschicktes Umformen sieht man, dass h ein Polynom in x und y ist. *b): 1,5 P.*

Wir untersuchen die Funktion h auf Stetigkeit in $(0,0)$. Ein geschultes Auge, oder Durchführen einer Polynomdivision, zeigt uns dass sich der Zähler faktorisieren lässt,

$$6x^3 - 3x^2y + 8xy^2 - 4y^3 = (3x^2 + 4y^2)(2x - y).$$

Damit erhalten wir

$$h(x,y) = \frac{6x^3 - 3x^2y + 8xy^2 - 4y^3}{3x^2 + 4y^2} = \frac{(3x^2 + 4y^2)(2x - y)}{3x^2 + 4y^2} = 2x - y.$$

Die Funktion $h(x,y)$ is also (nach stetiger Fortsetzung an den Nullstellen des Nenners) ein Polynom und als solches sogar überall stetig. Insbesondere ist h als Polynom total differenzierbar und stetig partiell differenzierbar.

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung in Richtung des Vektors $\vec{u} := (v,w)^\top$ der Funktion h aus Aufgabe b) im Punkt $(0,0)$ direkt über die Definition der Richtungsableitung

$$\partial_u \varphi(\xi) = \lim_{k \to 0} \frac{\varphi(\xi + k \cdot u) - \varphi(\xi)}{k}.$$

und verifizieren Sie Ihr Ergebnis durch Berechnung der Richtungsableitung mittels Gradienten. *c): 1,5 P.*

Wir setzen in die obenstehende Definition der Richtungsableitung ein und erhalten

$$\partial_v h(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{h\left((0,0) + k(v,w)\right) - h(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{2kv - kw}{k} = 2v - w.$$

Zur Verifikation unseres Ergebnisses berechnen wir den Gradienten von h, $\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Damit erhalten wir

$$\nabla h(0,0) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 2v - w.$$

Die beiden Ergebnisse stimmen überein!
Falls Sie angenommen haben, dass der Vektor $\vec{u}$ nicht normiert ist, und daher die Richtungsableitung durch die Länge des Vektors $\vec{u}$ dividiert haben, erhalten Sie ein um den Betrag von $\vec{u}$ skaliertes Ergebnis. Auch diese Vorgehensweise wird als richtig anerkannt.

- **Aufgabe 2.**

a) (2.5 Punkte) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix des Skalarfeldes f in einem Punkt (x, y) und bestimmen Sie die Bereiche (x, y), in denen f elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist. Das Skalarfeld f ist wie folgt definiert:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{3}y^3 + 5.$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x + y \\ y^2 + x \end{pmatrix}, \qquad Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$
$$det(Hf(x,y)) = 2y - 1$$

Es können nun folgende Fälle unterschieden werden:

- y$>\frac{1}{2}$, x beliebig: Die Hesse-Matrix ist positiv definit und daher ist f in diesem Bereich elliptisch.
- y$=\frac{1}{2}$, x beliebig: Die Hesse-Matrix ist singulär und daher ist f in diesesm Bereich parabolisch.
- y$<\frac{1}{2}$, x beliebig: Die Hesse-Matrix ist indefinit und daher ist f in diesem Bereich hyperbolisch.

b) (3.5 Punkte) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f. Handelt es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte? Geben Sie auch den Wert des Skalarfeldes am jeweiligen stationären Punkt an und begründen Sie für den Fall von Extremalstellen, ob es sich um lokale oder globale Minima/Maxima handelt.

Bedingung für stationäre Punkte: $\nabla f \overset{!}{=} 0$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} x + y \\ y^2 + x \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Dies liefert die folgenden Bedingungen.

$$x = -y$$
$$x = -y^2$$

Einsetzen liefert die Punkte (-1,1) und (0,0) als Lösung.

- Punkt (-1,1):

  $$det(Hf(-1, 1)) = 2 - 1 = 1 > 0$$
  $$f(-1, 1) = \frac{29}{6}$$

  Der Punkt (-1,1) ist ein Minimum, da die Hesse-Matrix an dieser Stelle positiv definit ist.

- Punkt (0,0).

  $$det(Hf(0, 0)) = -1 < 0$$
  $$f(0, 0) = 5$$

  Der Punkt (0,0) ist ein Sattelpunkt, da die Hesse-Matrix an dieser Stelle indefinit ist.

Es handelt sich in (-1,1) um ein lokales Minimum, weil zum Beispiel
$f(0, -2) = \frac{7}{3} < f(-1, 1)$.

- **Aufgabe 3.** Gegeben sei das Skalarfeld

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + 2y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

a) (1.5 Punkt) Bestimmen Sie die Niveauflächen $N_c(f)$. Bestimmen Sie den Wert c_0, so dass die Niveaufkäche $N_{c_0}(f)$ den Punkt $(0,2,1)^T$ enthält. Geben Sie $z = z(x,y)$ an.

Für Niveauflächen gilt $f(x,y,z) = c$, was wir nach einer der drei Variablen auflösen können.

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2} + 2y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ (3c)^{\frac{2}{3}} &= \frac{x^2}{2} + 2y^2 + z^2 \\ z &= \sqrt{(3c)^{\frac{2}{3}} - \frac{x^2}{2} - 2y^2} \end{aligned}$$

Einsetzen des Punktes erlaubt es nach c aufzulösen.

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{3}(8+1)^{\frac{3}{2}} \\ c &= 9 \end{aligned}$$

Das können wir noch in die Gleichung für z einsetzen und erhalten

$$z = \sqrt{9 - \frac{x^2}{2} - 2y^2}.$$

b) (2.5 Punkte) Berechnen Sie zunächst $\nabla f = \nabla f(x, y, z)$ und setzen Sie $z = z(x, y)$ ein, um $\nabla f = \nabla f(x, y) = \nabla f(x, y, z(x, y))$ zu erhalten. Werten Sie ∇f an der Stelle $(0, 2)^T$ aus.

$$\nabla f = \nabla f(x, y, z) = \frac{3}{6}\sqrt{\frac{x^2}{2} + 2y^2 + z^2}\begin{pmatrix} x \\ 4y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Auf der Niveaufläche sind die z Werte durch das Ergebnis aus a) bestimmt.

$$\nabla f = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{x^2}{2} + 2y^2 + 9 - \frac{x^2}{2} - 2y^2}\begin{pmatrix} x \\ 4y \\ 2\sqrt{9 - \frac{x^2}{2} - 2y^2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} x \\ 4y \\ 2\sqrt{9 - \frac{x^2}{2} - 2y^2} \end{pmatrix}$$

Setzen wir nun für die gesuchte Stelle ein.

$$\nabla f(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Richtung des Normalvektors an die Niveaufläche und zeigen Sie, für die Stelle $(0,2)^T$, dass $\nabla f(0,2)$ die gleiche Richtung hat. Was kann man daraus für die Richtungsableitung schließen, wenn Sie Richtungen betrachten, die in der Tangentialebene zur Niveaufläche im Punkt $(0,2,1)^T$ liegen?

Als Menge von Punkten im $\mathbb{R}^3$ lässt sich die Niveaufläche durch eine Menge von Vektoren mit $z(x,y)$ aus a) darstellen.

$$N_{c_0} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{9 - \frac{x^2}{2} - 2y^2} \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Eine Möglichkeit der Bestimmung des Normalvektors ist das Kreuzprodukt der Tangentialvektoren der Niveaufläche (wir bestimmen streng genommen den Normalvektor der Tangenitalebene an einen Punkt). Die Tangentialvektoren stecken in der linearen Approximation der Niveaufläche $z(x,y)$.

$$r_{N_{c_0}} = r_{N_{c_0}0} + \frac{\partial r_{N_{c_0}}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial r_{N_{c_0}}}{\partial y}\Delta y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \\ \frac{-x\Delta x}{2\sqrt{9-\frac{x^2}{2}-2y^2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta y \\ \frac{-4y\Delta y}{2\sqrt{9-\frac{x^2}{2}-2y^2}} \end{pmatrix}$$

Da wir auf einer Ebene sind, ist die Länge des Schrittes für die Richtung egal und mit $\Delta x = \Delta y = 1$ erhalten wir.

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-x}{2\sqrt{9-\frac{x^2}{2}-2y^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-4y}{2\sqrt{9-\frac{x^2}{2}-2y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2\sqrt{9-\frac{x^2}{2}-2y^2}} \\ \frac{4y}{2\sqrt{9-\frac{x^2}{2}-2y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alternativ können wir $z(x,y)$ zu einem

$$g(x,y,z) = \sqrt{9 - \frac{x^2}{2} - 2y^2} - z = 0$$

umformen. Diese Funktion ist auf der Nievaufläche ident Null, also konstant. Das bedeutet, dass der Gradient von g auf der Niveaufläche immer vertikal auf die Niveaufläche steht. Wir können daher (nur für Punkte auf der Niveaufläche) den Normalvektor durch den Gradient von g ausdrücken.

$$n = \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{2\sqrt{9-\frac{x^2}{2}-2y^2}} \\ \frac{-4y}{2\sqrt{9-\frac{x^2}{2}-2y^2}} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Setzen wir den gegebenen Punkt $(0, 2, 1)$ in den Normalvektor, bzw. ∇g ein, erhalten wir

$$\vec{n}(0, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 4 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

Wir sehen die Orientierung ist, je nach Methode, um 180 Grad gedreht (das kennen wir aus PraMa II). Mit dem Ergebnis aus b) erkennen wir, dass Gradient und Normalvektor parallel, bzw. antiparallel liegen. Im antiparallelen Fall drehen wir den Normalvektor einfach um, um auf das richtige Ergebnis zu kommen. Die Richtungsableitung entlang der Niveaufläche ergibt sich zu

$$D_v(f) = \nabla f \cdot v = 0,$$

da v tangential zur Niveaufläche, also orthogonal auf den Normalvektor und damit auf ∇f steht. Dies gilt für beliebige Punkte auf der Nivaufläche und auch für infinitesimale Veränderungen.