Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2021

A N A L Y S I S II F Ü R T P H, (103.091)

Test 2 Gruppe A (Fr, 18.06.2021) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

- **Aufgabe 1.**

a) (5 Punkte) Betrachten Sie die folgende Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[\sqrt{k^2+3k}-\sqrt{k^2+3}\right]^k |z-3|^k}{k^3}$$

und untersuchen Sie diese auf Konvergenz. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konviergiert die Potenzreihe?

Hinweis: Vergessen Sie gegebenenfalls nicht, auch den Rand zu untersuchen!

Wir verwenden das Wurzelkriterium und betrachten daher $\sqrt[k]{|a_k|}$, wobei wir mit a_k den k-ten Summanden in der gegebenen Summe bezeichnen.

$$\sqrt[k]{\left|\frac{\left[\sqrt{k^2+3k}-\sqrt{k^2+3}\right]^k |z-3|^k}{k^3}\right|} = \frac{|z-3|}{k^{\frac{3}{k}}}\left|\sqrt{k^2+3k}-\sqrt{k^2+3}\right|$$

$$= \frac{|z-3|}{k^{\frac{3}{k}}}\left|\frac{k^2+3k-(k^2+3)}{\sqrt{k^2+3k}+\sqrt{k^2+3}}\right| = \frac{|z-3|}{k^{\frac{3}{k}}}\left|\frac{3(k-1)}{k\left(\sqrt{1+\frac{3}{k}}+\sqrt{1+\frac{3}{k^2}}\right)}\right|$$

$$= \frac{3|z-3|}{k^{\frac{3}{k}}}\left|\frac{1-\frac{1}{k}}{\sqrt{1+\frac{3}{k}}+\sqrt{1+\frac{3}{k^2}}}\right| \overset{k\to\infty}{\to} \frac{3|z-3|}{1+1}.$$

Laut Wurzelkriterium muss dieser Ausdruck kleiner 1 sein, $\frac{3|z-3|}{2} \overset{!}{<} 1$. Daraus ergibt sich $|z-3| < \frac{2}{3}$ und wir erhalten somit Konvergenz für $z = 3 + re^{i\phi}$ mit $0 \leq r < \frac{2}{3}$ und $\phi \in \mathbb{R}$. Das Wurzelkriterium trifft keine Aussage über den Rand, weshalb wir nun die Konvergenz für $r = \frac{2}{3}$ untersuchen. Wir betrachten also $|z-3| = \frac{2}{3}$ und erhalten

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{k^3}\left|\left(\sqrt{k^2+3k}-\sqrt{k^2+3}\right)^k\right| = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{k^3}\left(\frac{k^2+3k-k^2-3}{\sqrt{k^2+3k}+\sqrt{k^2+3}}\right)^k$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{k^3}\left(\frac{3(k-1)}{k\left(\sqrt{1+\frac{3}{k}}+\sqrt{1+\frac{3}{k^2}}\right)}\right)^k = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{k^3}\left(\frac{3(1-\frac{1}{k})}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{k}}+\sqrt{1+\frac{3}{k^2}}\right)}\right)^k \leq \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{k^3}\left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{1}{k^3}$$

Dabei haben wir benützt, dass der Zähler durch 3 nach oben abgeschätzt werden kann und der Nenner sicher größer gleich 2 ist. Damit haben wir eine konvergente Majorante gefunden und somit gezeigt, dass die Potenzreihe auch am Rand des mittels Wurzelkriterium ermittelten Gebietes konvergiert. Die Potenzreihe konvergiert also auf einem Kreis um den Mittelpunkt 3 mit Radius $\frac{2}{3}$.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie $z = \sqrt[4]{5-7i}$. Geben Sie anschließend den Wert von z für den Hauptzweig explizit an!

Wir schreiben die Zahl unter der Wurzel (den Radikanten) in seine Polardarstellung um. Wir erhalten den Radius $r = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74}$ und den Polarwinkel $\varphi = \operatorname{atan}\left(\frac{-7}{5}\right) = -54,46°$oder -0.9505 rad. Damit folgt für z

$$z = \sqrt[4]{\sqrt{74}e^{-\varphi i}} = \sqrt[8]{74} \cdot e^{i(-\frac{\varphi+2\pi k}{4})} \approx 1.71 \cdot e^{\left(-0.237+\frac{\pi}{2}k\right)i}$$

für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Für den Hauptzweig $(k = 0)$ erhalten wir $z = 1.71e^{-0.237i} = 1.66 - 0.40i$.

- **Aufgabe 2.** Betrachten Sie folgendes Anfangswertproblem für $T \in (0,1)$:

$$x'(t) = -x(t) + e^{-t} \quad t \in [0,T], \quad x(0) = 0.$$

a) Schreiben Sie die Differentialgleichung in eine dazu äquivalente Integralgleichung um. *a): 0.5 P.*

Beidseitige Integration der Gleichung $x' = f(x(t),t)$ nach t liefert

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s),s)ds.$$

Dabei ist $x(0) = 0$ und $f(x(s),s) = -x(s) + e^{-s}$. Daher lautet die gesuchte äquivalente Integralgleichung

$$x(t) = \int_0^t \left(-x(s) + e^{-s}\right) ds, \quad t \in [0,T].$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass diese Integralgleichung eine eindeutige Lösung $x \in C[0,T]$ besitzt. *b): 2.5 P.*
Hinweis:

- *Schreiben Sie die Angabe als Fixpunktproblem $Fx = x$ mit einem Operator $F : (C[0,T], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$.*
  Der Beweis, dass $Fx \in (C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$ für $x \in (C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$ darf entfallen.
- *Beweisen sie danach, dass F eine Kontraktion ist.*

Definition des Operators F für $x \in C[0,T]$ durch

$$(Fx)(t) = \int_0^t \left(-x(s) + e^{-s}\right) ds.$$

F ist Kontraktion auf $(C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$:

$$\begin{aligned}
\|Fx_1 - Fx_2\|_\infty &= \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t \left(-x_1(s) + e^{-s}\right) ds - \int_0^t \left(-x_2(s) + e^{-s}\right) ds \right| \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} \int_0^t |x_1(s) - x_2(s)| ds \\
&\leq T\|x_1 - x_2\|_\infty
\end{aligned}$$

Da $T \in (0,1)$ gilt, ist F eine Kontraktion. Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz folgt daher die Existenz eines eindeutigen $x \in C[0,T]$ mit $Fx = x$, also existiert eine eindeutige Lösung der Integralgleichung.

c) Berechnen Sie eine Näherung dieser Lösung, indem Sie die ersten Schritte x_1 und x_2 einer Picarditeration durchführen. Geben Sie numerische Werte für $x_1(t = 0.5)$ und $x_2(t = 0.5)$ an. *c): 2 P.*

Zu Beginn wird der Startwert $x_0(s) = 0$ für x eingesetzt:

$$x_1(t) = x(0) + \int_0^t \left(-x_0(s) + e^{-s}\right) ds = \int_0^t e^{-s} ds = 1 - e^{-t}$$

Im zweiten Iterationsschritt ergibt sich:

$$x_2(t) = x(0) + \int_0^t \left(-x_1(s) + e^{-s}\right) ds = \int_0^t \left(-1 + 2e^{-s}\right) ds = 2 - t - 2e^{-t}$$

Für die numerischen Werte ergibt sich:

$$x_1(t = 0.5) \approx 0.39 \quad x_2(t = 0.5) \approx 0.29$$

d) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems. Geben Sie einen numerischen Wert für $x(t = 0.5)$ an. *d): 1 P.*

Mit der bekannten Lösung des homogenen Problems ($x'(t) = -x(t)$) $x_h(t) = ce^{-t}$ lässt sich die Lösung des inhomogenen Problems mittels Variation der Konstanten finden.
Einsetzen des Ansatzes $x(t) = c(t)e^{-t}$ liefert:

$$c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t} = -c(t)e^{-t} + e^{-t} \Rightarrow c'(t) = 1$$

damit lässt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung wie folgt anschreiben

$$x(t) = (c + t)e^{-t}$$

und für $x(0) = 0$ ergibt sich

$$x(t) = te^{-t} \quad x(t = 0.5) \approx 0.30.$$

- **Aufgabe 3.**

a) (3,5 Punkte) Entwickeln Sie die periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = |x| \cdot (\pi - |x|), \quad x \in (-\pi, \pi)$$

in eine trigonometrische Fourierreihe.

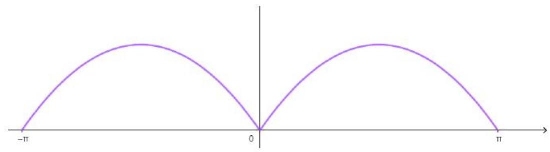

Abbildung 1: $f(x) = |x| \cdot (\pi - |x|)$

Da f gerade ist fallen die Koeffizienten $b_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ weg und uns bleibt nur die Berechnung der Koeffizienten a_n:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi x^2}{2}\Big|_0^{\pi} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right] = \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos(nx)dx \\ &\overset{p.I.}{=} \frac{2}{\pi}\left[\overbrace{\frac{x(\pi - x)\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}}^{0} - \int_0^{\pi}\frac{(\pi - 2x)\sin(nx)}{n}dx\right] \\ &= -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\sin(nx)dx \\ &\overset{p.I.}{=} -\frac{2}{\pi n}\left[\frac{-\cos(nx)(\pi - 2x)}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2\cos(nx)}{n}dx\right] \\ &= -\frac{2}{\pi n}\left[\frac{(-1)^n\pi}{n} + \frac{\pi}{n} - \overbrace{\left[\frac{2\sin(nx)}{n^2}\right]\Big|_0^{\pi}}^{0}\right] \\ &= -\frac{2}{n^2}\Big(1 + (-1)^n\Big) \\ &\Rightarrow a_n = \begin{cases} -\frac{4}{n^2} & \text{n gerade} \\ 0 & \text{n ungerade} \end{cases} \quad \overset{n \to 2n}{\Longrightarrow} a_{2n} = -\frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

$$f_{fourier}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}$$

b) (1 Punkt) Untersuchen Sie diese Fourierreihe nun auf punktweise Konvergenz, gleichmäßige Konvergenz sowie Konvergenz bezüglich der L^2-Norm.

(a) Konvergenz bezüglich L^2Norm: Aus $f \in L^2(-\pi, \pi)$ folgt die Konvergenz der Fourierreihe im Quadratmittel.

(b) Gleichmäßige Konvergenz: Da f stetig differenzierbar $\forall x \setminus \{m\pi\}, \quad m \in \mathbb{Z}$ und stetig $\forall x$ ist, konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f.

(c) Punktweise Konvergenz: Folgt aus gleichmäßiger Konvergenz.

c) (1,5 Punkte) Nutzen Sie nun das Ergebnis aus a) um einen Wert für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

zu berechnen.

Lösbar über Parseval'sche Gleichung:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)^2 dx$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\pi^2 - 2\pi x^3 + x^4 dx$$
$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi^5}{3} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{5} \right] = \frac{\pi^4}{15}$$
$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{15} = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \stackrel{a)}{=} \frac{\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{a_n^2}^{a_{2n-1}=0}$$
$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}^2 = \frac{\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{15} - \frac{\pi^4}{18} = \frac{\pi^4}{90}$$