Institut für Analysis und Scientific Computing
E. Weinmüller

TU Wien
SS 2022

# ANALYSIS II FÜR TPH, UE (103.091)

## 1. Haupttest (FR, 20.05.2022) *(mit Lösung)*

— *Ein einfacher Taschenrechner ist erlaubt. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| ↑ *FAMILIENNAME* | ↑ *Vorname* | ↑ *Studium / Matr.Nr.* |

| *1.* | *2.* | *3.* | *gesamt* |
|---|---|---|---|
| | | | |
| *Punkte* | | | *maximal 18* |

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

**Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.**

**Machen Sie sich zunächst Notizen**,
**und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt Zusammenfassung des Lösungweges ein!**

**Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.** ∘

- **Aufgabe 1.** Gegeben sei eine Funktion $f(x,y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = y^2 + x - x^2y + x^2 \tag{1}$$

a) (1 Punkt)

Berechnen Sie den Gradienten sowie die Jacobi Matrix von $f(x,y)$.

- $\nabla f(\text{x,y}) = \begin{pmatrix} 1 - 2xy + 2x \\ 2y - x^2 \end{pmatrix}$
- $J(f(x,y)) = \begin{pmatrix} -2y + 2 & -2x \\ -2x & 2 \end{pmatrix}$

b) (3 Punkte) Verwenden Sie das Newtonverfahren um die Gleichung $\nabla f = (0,0)^T$ zu lösen. Berechnen Sie die erste Iteration mit dem Startwert $(x_0, y_0) = (2,1)$ und geben Sie die Koordinaten $(x_1, y_1)$ an.

b) Das folgende lineare Gleichungssystem ist zu lösen:

$$\begin{pmatrix} -2y_0 + 2 & -2x_0 \\ -2x_0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\nabla f \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Auflösen der obigen Gleichung nach $\Delta x$, $\Delta y$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

c) (2 Punkte) Berechnen Sie ebenfalls die zweite Iteration und geben sie die Koordinaten $(x_2, y_2)$ an. Diese können auch näherungsweise berechnet werden.

c) Das zu lösende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -2y_1 + 2 & -2x_1 \\ -2x_1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\nabla f \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -13 \\ -13 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Auflösen der obigen Gleichung nach $\Delta x$, $\Delta y$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{1}{2960} \begin{pmatrix} -21 \\ 174 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.61791 \\ 1.30878 \end{pmatrix}$$

Die exakte Lösung lautet: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.61803 \\ 1.30902 \end{pmatrix}$

- **Aufgabe 2.**

Gegeben sei das Skalarfeld:

$$f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) + x - \frac{1}{2}y + \sin^2(y)$$

a) (2.5 Punkte) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix des Skalarfeldes $f$ in einem Punkt $(x,\, y)$ und bestimmen Sie die Bereiche des $\mathbb{R}^2$, in denen die Funktion $f$ elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist.

- Der Gradient des Skalarfeldes lautet:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\tan(2x) + 1 \\ \sin(2y) - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Die Hesse-Matrix lautet:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2\sqrt{3}}{\cos^2(2x)} & 0 \\ 0 & 2\cos(2y) \end{pmatrix}$$

- Durch das Hauptminorenkriterium können wir die Art der Punkte in verschiedenen Bereichen feststellen:

$$M_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{\cos^2(2x)} < 0 \quad \forall (x, y)$$

$$M_2 = \det(Hf(x, y)) = -\frac{4\sqrt{3}\cos(2y)}{\cos^2(2x)}$$

$\Rightarrow$

- $y \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, $x$ beliebig: Die Hesse-Matrix ist indefinit und daher ist $f$ in diesem Bereich hyperbolisch.
- $y = \dfrac{\pi}{4}$, $x$ beliebig: Die Hesse-Matrix ist singulär und daher ist $f$ in diesem Bereich parabolisch.
- $y > \dfrac{\pi}{4}$, $x$ beliebig: Die Hesse-Matrix ist negativ definit und daher ist $f$ in diesem Bereich elliptisch.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f. Handelt es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte? Begründen Sie Ihre Antwort.

Um die stationären Punkte zu finden, müssen wir das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\tan(2x) + 1 \\ \sin(2y) - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Aus der 1. Gleichung folgt:

$$\tan(2x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \Rightarrow \ x = \frac{\pi}{12}$$

- Aus der 2. Gleichung folgt:

$$\sin(2y) = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ y = \frac{\pi}{12} \ \text{ oder } \ y = \frac{5\pi}{12}$$

Daher sind die statioären Punkte $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right)$ und $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right)$, wobei der 1. Punkt einen Sattelpunkt (wegen $y < \frac{\pi}{4}$) und der 2. Punkt ein lokales Maximum (wegen $y > \frac{\pi}{4}$) darstellt.

c) (1.5 Punkte) Entwickeln Sie $f$ in das Taylorpolynom 2. Grades um den Punkt $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$.

Das quadratische Taylor-Polynom hat die Form:

$$T(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} Hf(x_0, y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Aus Unterpunkt (b) wissen wir, dass der Gradient an der Stelle $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12})$ verschwindet. Das heißt, dass wir nur noch f und Hf an der Stelle $(x_0, y_0)$ ausrechnen müssen.

$$f\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{24}\pi + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$Hf\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Nach Einsetzen in die obigen Formel bekommen wir:

$$T(x_0 + h, y_0 + k) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{24}\pi + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}h^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}k^2$$

- **Aufgabe 3.**

Gegeben sei das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = e^{x-2y} + \cos(x) - 4\sin(y)$.

a) (2 Punkte) Untersuchen Sie nach wie vielen Koordinaten Sie $f$ allgemein gleichzeitig auflösen können. Nach welchen Koordinaten können Sie $f(x,y) = -4$ um den Punkt $(\pi, \frac{\pi}{2})$ implizit auflösen? Begründen Sie ihre Antworten mit Argumenten, die auch für den allgemeinen Fall zutreffen können.

Wir überprüfen die Voraussetzungen um implizit auflösen zu können.

- Punkt auf der Niveaufläche?

$$f(\pi, \frac{\pi}{2}) = 1 - 1 - 4 = -4 \checkmark$$

- stetig partiell differenzierbar in einer Umgebung des Punktes?

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} e^{x-2y} - \sin(x) \\ -2e^{x-2y} - 4\cos(y) \end{pmatrix} \checkmark$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ invertierbar?

  Skalare $\to \neq 0$.

$$\vec{\nabla} f\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \checkmark$$

Wir haben eine Gleichung $f(x,y) = c \to$ können nach einer Koordinate auflösen. Alle partiellen Ableitungen sind im Punkt ungleich Null $\to$ können nach $x(y), y(x)$ auflösen.

b) (4 Punkte) Approximieren Sie die implizite Funktion der $y$-Koordinate in 2. Ordnung um $(\pi, \frac{\pi}{2})$. Ist die Approximation 2. Ordnung stetig (bezüglich einer Verschiebung des Entwicklungspunktes)?

Wir suchen die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von $y(x)$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}dx = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right)dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{e^{x-2y} - \sin(x)}{2e^{x-2y} + 4\cos(y)}$$

$$y'(\pi, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$$

Da die partiellen Ableitungen von $f$ als Funktionen von $x$ und $y$ stetig sind, ist der lineare Term in der Entwicklung stetig bezüglich einer Verschiebung des Entwicklungspunktes.

$$H_f = \begin{pmatrix} e^{x-2y} - \cos(x) & -2e^{x-2y} \\ -2e^{x-2y} & 4e^{x-2y} + 4\sin(y) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y')^2 + \frac{\partial f}{\partial y}y''$$

$$= e^{x-2y} - \cos(x) - 4e^{x-2y}y' + \left(4e^{x-2y} + 4\sin(y)\right)(y')^2 - \left(2e^{x-2y} + 4\cos(y)\right)y'' = 0$$

Da die Hessematrix von $f$ als Funktionen von $x$ und $y$ stetig ist, ist der quadratische Term in der Entwicklung stetig bezüglich einer Verschiebung des Entwicklungspunktes.

$$\frac{d^2 f}{dx^2}\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = 2 - 2y'' = 0 \;\Rightarrow\; y'' = 1$$

$$T_{2,y}(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}y''(x_0)(x - x_0)^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(x - \pi) + \frac{1}{2}(x - \pi)^2$$

Alternativ können wir den analytischen Ausdruck für $y'$ direkt ableiten. Dabei müssen wir berücksichtigen, dass $y$ eine Funktion von $x$ ist und wir innere Ableitungen erhalten.

$$y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{e^{x-2y(x)} - \sin(x)}{e^{x-2y(x)} + 2\cos(y(x))}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{x-2y} - 2e^{x-2y}y' - \cos(x)}{e^{x-2y} + 2\cos(y)} - \frac{e^{x-2y} - \sin(x)}{\left(e^{x-2y} + 2\cos(y)\right)^2}\left(e^{x-2y} - 2e^{x-2y}y' - 2\sin(y)y'\right)\right]$$

$$y''(\pi) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^0 - 2e^0\frac{1}{2} + 1}{e^0 + 0} - \frac{e^0 - 0}{(e^0+0)^2}(e^0 - 2e^0\frac{1}{2} - \frac{2}{2})\right] = -1$$

$$T_{2,y}(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}y''(x_0)(x - x_0)^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(x - \pi) + \frac{1}{2}(x - \pi)^2$$