

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 2 Gruppe B (Fr, 24.06.2022) (mit Lösung)

— Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min. —

↑ <i>FAMILIENNAME</i>	↑ <i>Vorname</i>	↑ <i>Studium / Matr.Nr.</i>

<i>1.</i>	<i>2.</i>	<i>3.</i>	<i>gesamt</i> <input type="text"/>
<i>Punkte</i>			<i>maximal 18</i>

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die in die entsprechenden *Kästchen* eingetragenen Antworten.

Machen Sie sich zunächst Notizen

und tragen Sie dann erst Ihre Lösung samt ausführlicher Zusammenfassung des Lösungsweges ein!

Die Größe der Kästchen ist auf die jeweilige Aufgabe abgestimmt.

• **Aufgabe 1.** Berechnen Sie, mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes, folgendes Integral entlang der gegebenen Kurven und geben Sie im Endergebnis **alle** Lösungen des **ersten Hauptzweiges** beim Wurzelziehen an,

$$\oint_{\Gamma_i} \frac{2\sqrt[3]{4z(\frac{z}{2}-i)^3}}{(z-2i)(z^2+2z-i(4+2z))} dz,$$

$\Gamma_1 = C_2(-1)$, $\Gamma_2 = C_2(i)$, mit $C_r(z_0)$ als Kreis mit Radius r um den Punkt z_0 .

a) (1.5 Punkte) Überprüfen Sie die notwendigen Bedingungen und wenden Sie den Cauchy'schen Integralsatz an.

Hinweis: Der Integrand kann in folgender Form geschrieben werden:

$$-\frac{1-i}{4} \frac{\sqrt[3]{4z}}{z+2} + \frac{1-i}{4} \frac{\sqrt[3]{4z}}{z-2i}$$

Die Kurve ist geschlossen, glatt und Rand eines Gebietes D , in dem $f(z) = \sqrt[3]{4z}$ existiert. $f(z)$ ist analytisch in D , sowie am Rand von D , also auch stetig am Rand. Zumindest eine der Polstellen liegt in D .

Da alle Kriterien erfüllt sind, verwenden wir den Cauchy'schen Integralsatz und erhalten

$$= \begin{cases} C_2(-1) : -2\pi i \frac{1-i}{4} \sqrt[3]{-8} = -\pi(i+1)e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{n2\pi}{3})} \\ C_2(i) : 2\pi i \frac{1-i}{4} \sqrt[3]{8i} = \pi(1+i)e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{n2\pi}{3})} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2.$$

Da jeweils nur eine Polstelle des Integranden innerhalb der geschlossenen Kurve liegt. Wir haben dabei berücksichtigt, dass wir für die Wurzel eine Schar äquivalenter Lösungen erhalten, die für gegebene n im ersten Hauptzweig liegen.

- b) (2.5 Punkte) Leiten Sie die im Hinweis unter a) gegebene Form des Integranden, ausgehend von der ursprünglich gegebenen Form, her.

Wir vereinfachen soweit wie möglich.

$$\frac{2\sqrt[3]{4z\left(\frac{z}{2}-i\right)^3}}{(z-2i)(z^2+2z-i(4+2z))} = \frac{(z-2i)\sqrt[3]{4z}}{(z-2i)(z^2+2z-i(4+2z))} = \frac{\sqrt[3]{4z}}{z^2+2z-i(4+2z)}$$

$$z^2+2z-4i-2iz = z^2-2(i-1)z-4i$$

$$z_{1,2} = i-1 \pm \sqrt{2i}$$

$$\sqrt{2i} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1+i$$

$$z_1 = 2i, \quad z_2 = -2$$

Wir verwenden Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-2i)(z+2)} &= \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-2i} \\ 1 &= A(z-2i) + B(z+2) \\ z = 2i : B &= \frac{1}{4}(1-i) \\ z = -2 : A &= -\frac{1}{4}(1-i)\end{aligned}$$

Das Integral wird zu

$$-\frac{1-i}{4} \oint_{\Gamma_i} \frac{\sqrt[3]{4z}}{z+2} dz + \frac{1-i}{4} \oint_{\Gamma_i} \frac{\sqrt[3]{4z}}{z-2i} dz.$$

c) (2 Punkte) Berechnen Sie folgendes komplexe Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} (4z + 6z^2) dz$$
$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = x + i \cos\left(\frac{x}{2}\right), x \in [-\pi, 3\pi] \right\},$$

mit dem Anfangspunkt $z_1 = -\pi$ und Endpunkt $z_2 = 3\pi$.

Wir stellen fest, dass der Integrand analytisch auf ganz \mathbb{C} ist. Damit ist das Integral auf ganz \mathbb{C} wegunabhängig und es macht Sinn von "dem" Wert des Integrals von z_1 nach z_2 zu sprechen. Folglich können wir direkt eine Stammfunktion an den Grenzen auswerten und erhalten

$$\int_{z_1}^{z_2} (4z + 6z^2) dz = 2z^2 + 2z^3 \Big|_{z_1}^{z_2} = 16\pi^2 + 56\pi^3.$$

- **Aufgabe 2.** Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für $B \in (0, 1)$:

$$x'(t) = -tx(t) + 3e^{-3t} \quad t \in [0, B], \quad x(0) = 0.$$

- a) (0.5 Punkte) Schreiben Sie die Differentialgleichung in eine dazu äquivalente Integralgleichung um.

Beidseitige Integration der Gleichung $x' = f(x(t), t)$ nach t liefert

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s), s) ds.$$

Dabei ist $x(0) = 0$ und $f(x(s), s) = -sx(s) + 3e^{-3s}$. Die gesuchte Integralgleichung lautet

$$x(t) = \int_0^t (-sx(s) + 3e^{-3s}) ds, \quad t \in [0, B].$$

- b) (2 Punkte) Zeigen Sie mithilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass diese Integralgleichung eine eindeutige Lösung $x \in C[0, B]$ besitzt.

Hinweis:

- Schreiben Sie die Angabe als Fixpunktproblem $Fx = x$ mit einem Operator $F : (C[0, B], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[0, B], \|\cdot\|_\infty)$.
Der Beweis, dass $Fx \in (C[0, B], \|\cdot\|_\infty)$ für $x \in (C[0, B], \|\cdot\|_\infty)$ darf entfallen.
- Beweisen sie danach, dass F eine Kontraktion ist.

Der Operator F ist für $x \in C[0, B]$ durch

$$(Fx)(t) = \int_0^t (-sx(s) + 3e^{-3s}) ds$$

definiert.

Nun beweisen wir, dass F eine Kontraktion auf $(C[0, B], \|\cdot\|_\infty)$ ist.

$$\begin{aligned} \|Fx_1 - Fx_2\|_\infty &= \max_{t \in [0, B]} \left| \int_0^t (-sx_1(s) + 3e^{-3s}) ds - \int_0^t (-sx_2(s) + 3e^{-3s}) ds \right| = \\ &= \max_{t \in [0, B]} \left| \int_0^t s(x_1(s) - x_2(s)) ds \right| \leq \max_{t \in [0, B]} \int_0^t |s(x_1(s) - x_2(s))| ds = \\ &= \max_{t \in [0, B]} \int_0^t s|x_1(s) - x_2(s)| ds \leq \max_{t \in [0, B]} \int_0^t s\|x_1 - x_2\|_\infty ds = \\ &= \|x_1 - x_2\|_\infty \max_{t \in [0, B]} \int_0^t s ds = \frac{B^2}{2} \|x_1 - x_2\|_\infty \end{aligned}$$

Da $B \in (0, 1)$ und somit $\frac{B^2}{2} \in (0, 1)$ gilt, ist F eine Kontraktion. Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz folgt daher die Existenz eines eindeutigen $x \in C[0, B]$ mit $Fx = x$. Somit existiert eine eindeutige Lösung der Integralgleichung.

- c) (1.5 Punkte) Berechnen Sie eine Näherung dieser Lösung, indem Sie die ersten Schritte x_1 und x_2 einer Picarditeration durchführen.

Am Anfang wird der Startwert $x_0(s) = 0$ für x eingesetzt.

$$x_1(t) = x(0) + \int_0^t (-sx_0(s) + 3e^{-3s}) ds = 3 \int_0^t e^{-3s} ds = 1 - e^{-3t}.$$

Im zweiten Iterationsschritt erhalten wir den folgenden Ausdruck.

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x(0) + \int_0^t (-sx_1(s) + 3e^{-3s}) ds = \int_0^t (-s + se^{-3s} + 3e^{-3s}) ds = \\ &= \frac{1}{18}(20 - 9t^2 - 2e^{-3t}(10 + 3t)). \end{aligned}$$

d) (2 Punkte) Gegeben sei nun die Differentialgleichung

$$x'(t) = 2x(t)$$

mit $x(0) = 2$. Führen Sie eine Picarditeration durch und finden Sie die Reihendarstellung des n-ten Iterationsschritts $x_n(t)$. Vergleichen Sie dies mit der exakten Lösung der Differentialgleichung.

Zunächst führen wir eine Picarditeration durch.

$$x_0(t) = 2$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t 2x_0(s)ds = 2 + 4t = 2(1 + 2t)$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t 2x_1(s)ds = 2 + 4t + 4t^2 = 2(1 + 2t + 2t^2)$$

$$x_3(t) = x_0 + \int_0^t 2x_2(s)ds = 2 + 4t + 4t^2 + \frac{8}{3}t^3 = 2(1 + 2t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3)$$

Nun können wir auf den n-ten Iterationsschritt schließen.

$$x_n(t) = 2 \left(\sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} \right)$$

Im Limit $n \rightarrow \infty$ erhalten wir die exakte Lösung

$$x(t) = 2e^{2t}.$$

• **Aufgabe 3.** Gegeben sei die Funktionenfolge

$$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ 1, \left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}, \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)x}, \dots \right\}.$$

a) (2 Punkte) Sei nun $x = 1$ in obiger Funktionenfolge, somit erhalten wir eine Folge $u_1 \in \ell^2$.

Diese spannt gemeinsam mit der Folge

$$u_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots)$$

einen Unterraum $M \subset \ell^2$ auf. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von M bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

und der Norm

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

in ℓ^2 .

Hinweis: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$

u_2 ist bereits normiert:

$$\varphi_2 = u_2.$$

Berechne φ_1 mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= u_1 - \langle u_1, \varphi_2 \rangle \varphi_2 = \\ &= \left(1, 0, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^5, \dots \right). \end{aligned}$$

Berechne die Norm um anschließend normieren zu können:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}_1\|_2 &= \sqrt{1 + 0 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^5 + \dots} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{1}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{13}{12}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{3}}. \end{aligned}$$

Nun können wir φ angeben:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{\tilde{\varphi}_1}{\|\tilde{\varphi}_1\|_2} = \\ &= 2\sqrt{\frac{3}{13}} \left(1, 0, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^5, \dots \right).\end{aligned}$$

Die so bestimmte Orthonormalbasis von M lautet

$$\phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}.$$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion der Folge u_3 auf den Unterraum M .

$$u_3 = \left(-\sqrt{13}, \sqrt{13}, -\sqrt{13}, \sqrt{13}, -\sqrt{13}, \sqrt{13}, \dots\right)$$

Hinweis: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$

Die Projektion von u_3 auf M lautet

$$\mathcal{P}_M(u_3) = \langle u_3, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + \langle u_3, \varphi_2 \rangle \varphi_2.$$

$$\begin{aligned} \langle u_3, \varphi_1 \rangle &= 2\sqrt{3} \left(-1 + 0 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots \right) = \\ &= -2\sqrt{3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2} \right) = \\ &= -2\sqrt{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = -7\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \langle u_3, \varphi_2 \rangle &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

Somit lautet die Orthogonalprojektion

$$\mathcal{P}_M(u_3) = -7\frac{\sqrt{3}}{3} \varphi_1 + \sqrt{13} \varphi_2.$$

c) (2 Punkte) Untersuchen Sie die Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ auf dem Intervall $I = [0, 4]$:

- Geben Sie die Grenzfunktion $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in I$ an.
- Untersuchen Sie die Funktionenfolge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Konvergiert die Folge $\{f_n\}$ für alle $x \in I$, so heißt $\{f_n\}$ **punktweise konvergent** auf I . $f_n(x)$ konvergiert dann gegen die Grenzfunktion

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in I.$$

Die Funktionenfolge $\{f_n\}$ heißt **gleichmäßig konvergent** auf I gegen die Funktion $f(x)$, wenn gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

$\{f_n\}$ ist **punktweise konvergent auf I** , sie konvergiert punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)x} = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \leq 4. \end{cases}$$

$\{f_n\}$ ist **nicht gleichmäßig konvergent auf I** , da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < x \leq 4} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)x} - 0 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1) \cdot 0} = 1.$$