Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2023

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 1 (FR, 19.05.2023) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die auf den abgegebenen Blättern eingetragenen Antworten.

Vergessen Sie nicht, am Ende des schriftlichen Tests Ihre Ausarbeitungen sowie Ihren Ausweis mit Ihrem Smartphone/Tablett zu digitalisieren und in TUWEL hochzuladen.

- **Aufgabe 1.**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass folgende Funktionen bei $(x, y) = (0, 0)$ nicht stetig sind:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^5}{y^2 + x^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y^8}{(y^4 + (2y^2 + x)^2)^3} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Für f setze z.B. $y = 0$, dann gilt:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x} \to \infty \neq 0$$

Für g setze z.B. $x = y^2$, dann gilt:

$$\lim_{y=\to 0} g(y^2, y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^{12}}{(y^4 + (2y^2 + y^2)^2)^3} = \lim_{y\to 0} \frac{y^{12}}{(10y^4)^3} = \frac{1}{1000} \neq 0$$

b) (2 Punkte) Wo ist folgende Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig?

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2 + x^2 y + y}{x^4 + 2x^3 y + x^2 y^2 + 1} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Hinweis:</u> *Betrachten Sie den Nennen genauer.*

$$f(x,y) = \frac{xy^2 + x^2 y + y}{x^4 + 2x^3 y + x^2 y^2 + 1} = \frac{xy^2 + x^2 y + y}{x^2(x^2 + 2xy + y^2) + 1} = \frac{xy^2 + x^2 y + y}{\underbrace{x^2(x+y)^2}_{\geq 0} + 1}$$

<u>Satz 1.9:</u> Jede rationale Funktion ist stetig an allen Stellen, an denen der Nenner nicht verschwindet.

$$\Rightarrow f \text{ ist stetig in ganz } \mathbb{R}^2.$$

c) (2 Punkte) Untersuchen Sie die folgende Funktion f auf Richtungsdifferenzierbarkeit an der Stelle $\xi = (0,0)$.

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2x^4y^3 - y^5}{(2y^4 + x^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Hinweis: *Verwenden Sie die Definition der Richtungsableitung*

$$\partial_e f(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + he) - f(\xi)}{h} \quad \text{mit} \quad e = (v,w) \quad \text{und} \quad v^2 + w^2 = 1.$$

$$\partial_e f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(hv, hw) - 0}{h}$$

$$f(hv, hw) = \frac{2h^4v^4h^3w^3 - h^5w^5}{(2h^4w^4 + h^2v^2)^2} = \frac{h^5(2h^2v^4w^3 - w^5)}{h^4(2h^2w^2 + v^2)^2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(hv, hw)}{h} = \frac{h^5(2h^2v^4w^3 - w^5)}{h^5(2h^2w^2 + v^2)^2} = -\frac{w^5}{v^4} \quad \underline{\text{für } v \neq 0}$$

<u>für $v = 0$:</u> $\Rightarrow w = \pm 1$ da $v^2 + w^2 = 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0, \pm h)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\mp \frac{1}{4h^4} \right) \to - \mp \infty$$

$\Rightarrow f$ ist nicht Richtungsdifferenzierbar in $(0,0)$.

• **Aufgabe 2.**

Gegeben sei das Skalarfeld:

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$

mit

$$\mathbb{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \in \mathbb{R}\right\}$$

und

$$f(x, y) = x^4 + xy^3 - 3y + 7.$$

a) (2.5 Punkte) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix des Skalarfeldes f in einem Punkt $(x,\ y)$ und bestimmen Sie die Bereiche des $\mathbb{R}^2$, in denen die Funktion f elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist.

<u>*Hinweis:*</u> *Geben sie die Bereiche von y in Abhängigkeit von x an.*

- Der Gradient des Skalarfeldes lautet:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + y^3 \\ 3xy^2 - 3 \end{pmatrix}$$

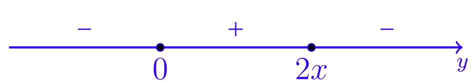
- Die Hesse-Matrix lautet:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 3y^2 \\ 3y^2 & 6xy \end{pmatrix}$$

- Durch das Hauptminorenkriterium können wir die Art der Punkte in verschiedenen Bereichen feststellen:

$$M_1 = 12x^2 > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{D}$$
$$M_2 = \det\left(Hf(x, y)\right) = 9y\left((2x)^3 - y^3\right)$$

Betrachten wir das Vorzeichenverhalten der Determinante M_2:



$\Rightarrow$

- $y \in (0, 2x)$, $x > 0$: Die Hesse-Matrix ist positiv definit und daher ist f in diesem Bereich elliptisch.
- $y \in \{0, 2x\}$, $x > 0$: Die Hesse-Matrix ist singulär und daher ist f in diesem Bereich parabolisch.
- $y \in (-\infty, 0) \cup (2x, \infty)$, $x > 0$: Die Hesse-Matrix ist indefinit und daher ist f in diesem Bereich hyperbolisch.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f. Handelt es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte? Begründen Sie Ihre Antwort.

Um die stationären Punkte zu finden, müssen wir das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 4x^3 + y^3 \\ 3(xy^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Aus der 2. Gleichung folgt:

$$x = \frac{1}{y^2} \quad \text{für} \quad y \neq 0$$

- Setzten wir dieses Ergebnis in die 1. Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\frac{4}{y^6} + y^3 = 0 \;\Rightarrow\; y = -\sqrt[9]{4}$$

Daher ist der statioäre Punkt $\left(\frac{1}{\sqrt[9]{16}}, -\sqrt[9]{4}\right)$. Dieser Punkt stellt einen Sattelpunkt (wegen $y < 0$) dar.

c) (1.5 Punkte) Entwickeln Sie f in das Taylorpolynom 2. Grades um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Das quadratische Taylor-Polynom hat die Form:

$$T(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} Hf(x_0, y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

$$f(1,0) = 1 + 7 = 8$$

$$\vec{\nabla} f(1,0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Einsetzen in die obige Formel bekommen wir:

$$T(x_0 + h, y_0 + k) = 8 + 4h - 3k + 6h^2$$

Alternativ können wir $(x_0 + h, y_0 + k)$ direkt in f einsetzen und die Terme wegstreichen, die in höheren Graden von h und k vorkommen als zwei. Anschließend setzen wir die Entwicklungsstelle ein. Der Grund, warum dies funktioniert, ist, dass f ein Polynom in zwei Variablen ist.
Somit erhalten wir:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = (x_0 + h)^4 + (x_0 + h)(y_0 + k)^3 - 3(y_0 + k) + 7$$

$$\begin{aligned} T(x_0 + h, y_0 + k) = x_0^4 + 4x_0^3 h + 6x_0^2 h^2 + \cancel{4h^3 x + h^4} \\ + x(y_0^3 + 3y_0^2 k + 3y_0 k^2 + \cancel{k^3}) \\ + h(y_0^3 + 3y_0^2 k + \cancel{3y_0 k^2 + k^3}) - 3(y_0 + k) + 7) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(x_0 + h, y_0 + k) = 8 + 4h - 3k + 6h^2 \checkmark$$

• **Aufgabe 3.** Ein Stabpendel der Länge $x > 0$ wird mit einer Torsionsfeder gekoppelt. Die Gesamtkraft, die auf die Masse wirkt, ist gegeben durch

$$f(x, y) = mg\sin(y) - \frac{Dy}{x},$$

wobei y die Winkelkoordinate ist. Mit den Konstanten $D = \frac{1}{\pi}$, $m = 0.1$, $g = 10$ ergibt sich daraus

$$f(x, y) = \sin(y) - \frac{y}{\pi x}, \quad \forall (x, y): \ x > 0, \ y \in \mathbb{R}.$$

Das Drehmoment der Feder sorgt dafür, dass das Pendel bei einer Stablänge von $x_0 = \frac{1}{2}$ und einem Winkel von $y_0 = \frac{\pi}{2}$ im Kräftegleichgewicht liegt. Es gilt also

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Wir sind an der Ruhelage $y(x_0 + \Delta x)$ unter kleinen Längenänderungen $\Delta x = x - x_0$ interessiert.

Hinweis: Dies ist kein Physikbeispiel, es sind keine physikalischen Überlegungen notwendig. Winkelfunktionen sollen nicht genähert werden.

a) (1.5 Punkte) Welche Bedingungen sind notwendig, um den Satz über implizite Funktionen anwenden zu dürfen? Überprüfen Sie explizit, ob die Funktion $y(x)$ um den Gleichgewichtspunkt (x_0, y_0) genähert werden kann.

Die drei Bedingungen für den Satz über implizite Funktionen sind:

(i) Das Vektorfeld $f(x, y)$ muss stetig differenzierbar sein. Die partiellen Ableitungen ergeben jeweils

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \cos(y) - \frac{1}{\pi x} = \cos(y) - \frac{1}{\pi x}$$
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{\pi x^2} = \frac{y}{\pi x^2}$$

Beide Ableitungen sind für $x \in \mathbb{R}^+$ stetig.

(ii) Es muss einen Punkt geben, an dem die Funktion Null wird. Dies ist gegeben durch $f(x_0, y_0) = 0$.

(iii) Die partielle Ableitung nach der gesuchten Funktion muss am Gleichgewichtspunkt invertierbar sein, also

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{2}{\pi} \neq 0$$

□

b) (3 Punkte) Finden Sie den Ausdruck für die Taylorreihe erster Ordnung von $y\left(x_0+\Delta x\right)$ um den Gleichgewichtspunkt.

Die Taylorreihe in erster Ordnung lautet

$$y\left(x_0+\Delta x\right)|_{\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\mathrm{d}y\left(\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{d}x}\Delta x + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right).$$

Es muss also die erste Ableitung bestimmt werden. Dafür verwenden wir den Satz der impliziten Funktionen. Wir leiten $f\left(x,y\right)$ am Gleichgewichtspunkt total nach x ab, und erhalten mit $x_0=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f\left(x_0,y_0\right)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x} + \frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y\left(x_0\right)}{\mathrm{d}x}\\
&= \frac{y_0}{\pi {x_0}^2} + \left(\cos(y_0) - \frac{1}{\pi x_0}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y\left(x_0\right)}{\mathrm{d}x}\\
&= \frac{4\pi}{2\pi} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}y\left(x_0\right)}{\mathrm{d}x}\\
&= 2 - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}y\left(x_0\right)}{\mathrm{d}x} = 0
\end{aligned}$$

Umformen ergibt

$$\frac{\mathrm{d}y\left(\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{d}x} = \pi$$

Dadurch können wir die erste Taylornäherung aufstellen:

$$y\left(x_0+\Delta x\right)|_{\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \pi\cdot\Delta x + \mathcal{O}\left((\Delta x)^2\right)$$

c) (1,5 Punkte) Geben Sie nun auch den quadratischen Term der Taylorentwicklung von $y\left(x_0+\Delta x\right)$ um den Gleichgewichtspunkt an.

Die Taylorreihe in zweiter Ordnung lautet

$$y\left(x_0+\Delta x\right)|_{\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\mathrm{d}y\left(\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{d}x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2y\left(\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{d}x^2}\left(\Delta x\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\Delta x\right)^3\right)$$

Die zweite Ableitung wird gefunden, indem $f\left(x,y\right)$ am Gleichgewichtspunkt zwei Mal total nach x abgeleitet wird. Anwendung der Ketten- und Produktregel ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2f\left(x_0,y_0\right)}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\partial^2 f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x^2} + 2\cdot\frac{\partial^2 f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x\partial y}\cdot y'\left(x_0\right) + \frac{\partial^2 f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y^2}\cdot\left(y'\left(x_0\right)\right)^2 + \frac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}\cdot y''\left(x_0\right)\\ &= -2\frac{y_0}{\pi x_0^3} + \frac{2}{\pi x_0^2}\cdot y'\left(x_0\right) - \sin\left(y_0\right)\cdot\left(y'\left(x_0\right)\right)^2 + \left(\cos(y_0) - \frac{1}{\pi x_0}\right)\cdot y''\left(x_0\right)\\ &= -8 + \frac{8}{\pi}\cdot y'\left(x_0\right) - \left(y'\left(x_0\right)\right)^2 - \frac{2}{\pi}\cdot y''\left(x_0\right) = 0.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von dem Ausdruck, der bereits in b) für die erste Ableitung von $y\left(x_0\right)$ gefunden wurde, ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}^2f\left(x_0,y_0\right)}{\mathrm{d}x^2} = -\pi^2 - \frac{2}{\pi}\cdot y''\left(x_0\right) = 0.$$

Umformen liefert die zweite Ableitung:

$$y''\left(x_0\right) = -\frac{\pi^3}{2}$$

Zuletzt müssen die beiden Ableitungen in die oben genannte Taylorformel eingesetzt werden. Ausgeschrieben lautet die Näherung in zweiter Ordnung für y an der Stelle $x = x_0 = \frac{1}{2}$

$$y\left(x_0+\Delta x\right)|_{\frac{1}{2},\frac{\pi}{2}} \approx \frac{\pi}{2} + \pi\cdot\Delta x - \frac{\pi^3}{4}\left(\Delta x\right)^2.$$