Institut für Analysis und Scientific Computing
Dr. E. Weinmüller

TU Wien
SS 2023

ANALYSIS II FÜR TPH, (103.091)

Test 2 (FR, 23.06.2023) *(mit Lösung)*

— *Sie können den Taschenrechner verwenden. Unterlagen: eigenes VO-Skriptum. Arbeitszeit: 90 min.* —

↑ *FAMILIENNAME*	↑ *Vorname*	↑ *Studium / Matr.Nr.*

1.	*2.*	*3.*	*gesamt*
Punkte			*maximal 18*

Tragen Sie bitte oben Ihre persönlichen Daten ein.

Als Grundlage für die Beurteilung dienen ausschließlich die auf den abgegebenen Blättern eingetragenen Antworten.

Vergessen Sie nicht, am Ende des schriftlichen Tests Ihre Ausarbeitungen sowie Ihren Ausweis mit Ihrem Smartphone/Tablett zu digitalisieren und in TUWEL hochzuladen.

- **Aufgabe 1.** Betrachten Sie folgendes Anfangswertproblem für $T \in (0,1)$:

$$x'(t) = 2t^3 + 2tx(t), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = 0.$$

a) (1 Punkt) Geben Sie eine zur Differentialgleichung äquivalente Integralgleichung an.

Beidseitige Integration der Gleichung $x' = f(x(t),t)$ nach t liefert

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(s)),s)ds.$$

Dabei ist $x(0) = 0$ und $f(x(s),s) = 2s^3 + 2sx(s)$. Daher lautet die gesuchte äquivalente Integralgleichung

$$x(t) = \int_0^t (2s^3 + 2sx(s))ds.$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die ersten drei Schritte x_1, x_2 und x_3 der Picard-Iteration,

$$x_{i+1}(t) = \int_0^t (2s^3 + 2sx_i(s))ds, \quad x_0(t) = 0,$$

und stellen Sie eine Formel für x_n, $n \in \mathbb{N}$ auf.

Mit $x_0(s) = 0$ ergibt sich,

$$x_1(t) = \int_0^t (2s^3 + 2sx_0(s))ds = 2\int_0^t s^3 ds = \frac{t^4}{2}.$$

Im zweiten Iterationsschritt erhalten wir

$$x_2(t) = \int_0^t (2s^3 + 2sx_1(s))ds = \int_0^t (2s^3 + s^5)ds = \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6}.$$

Im dritten Iterationsschritt ergibt sich,

$$x_3(t) = \int_0^t (2s^3 + 2sx_2(s))ds = \int_0^t (2s^3 + s^5 + \frac{s^7}{3})ds = \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!}.$$

Somit lautet die allgemeine Formel,

$$x_n(t) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^{2k}}{k!}.$$

c) (1 Punkt) Geben Sie die exakte Lösung der Differentialgleichung an.

Im Limit $n \to \infty$ erhalten wir die exakte Lösung

$$x_n(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^{2k}}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^{2k}}{k!} - (t^2+1) = e^{t^2} - t^2 - 1.$$

d) (2 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpuktsatzes, dass diese Integralgleichung eine eindeutige Lösung $x \in C[0,T]$ besitzt.

Hinweis:

- *Schreiben Sie die Angabe als Fixpunktproblem $Fx = x$ mit einem Operator $F : (C[0,T], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$ an.*
- *Der Beweis, dass $Fx \in (C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$ für $x \in (C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$ darf entfallen.*
- *Beweisen Sie danach, dass F eine Kontraktion ist.*

- Definiere den Operator F für $x \in C[0,T]$ durch

$$(Fx)(t) = \int_0^t (2s^3 + 2sx(s))ds.$$

- F ist eine Kontraktion auf $(C[0,T], \|\cdot\|_\infty)$, da gilt

$$\begin{aligned}
\|Fx_1 - Fx_2\|_\infty &= \max_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t (2s^3 + 2sx_1(s))ds - \int_0^t (2s^3 + 2sx_2(s))ds \right| \\
&\leq \max_{t\in[0,T]} \left| 2 \int_0^t sx_1(s)) - sx_2(s))ds \right| \\
&\leq \| x_1 - x_2\|_\infty \cdot 2 \int_0^T sds = T^2 \| x_1 - x_2\|_\infty,
\end{aligned}$$

mit $T^2 < 1$. Damit folgt aus dem Banach'schen Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutigen $x \in C[0,T]$ mit $Fx = x$, also existiert eine eindeutige Lösung der Integralgleichung.

- **Aufgabe 2.**

a) (4 Punkte) Entwickeln Sie die periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = 30\pi^2 x^2 - 15x^4 - 7\pi^4, \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

in eine trigonometrische Fourierreihe.

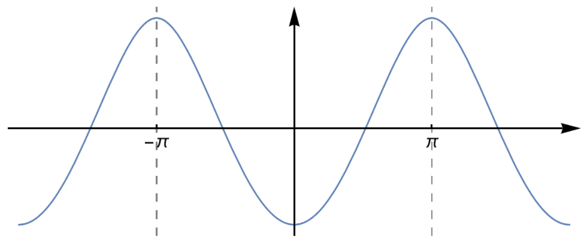


Abbildung 1: $f(x) = 30\pi^2 x^2 - 15x^4 - 7\pi^4$

Hinweis: $\int x^4 \cos(kx)\ \mathrm{d}x = \frac{x^4 \sin(kx)}{k} + \frac{4x^3 \cos(kx)}{k^2} - \frac{12}{k^2} \int x^2 \cos(kx)\ \mathrm{d}x$

$f \in L^2(-\pi, \pi)$ kann als trigonometrische Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right]$$

entwickelt werden, wobei $b_k = 0\ \forall k$, da f gerade ist, und a_k durch

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, \mathrm{d}x = 30\pi \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx)\, \mathrm{d}x - \frac{15}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \cos(kx)\, \mathrm{d}x - 7\pi^3 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\, \mathrm{d}x$$

gegeben ist. Wiederholte (partielle) Integration liefert

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\, \mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx)\, \mathrm{d}x = \left.\frac{x^2 \sin(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{k} \left.\frac{x \cos(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{4\pi (-1)^k}{k^2},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \cos(kx)\, \mathrm{d}x = \left.\frac{x^4 \sin(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{4}{k} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin(kx)\, \mathrm{d}x = \frac{4}{k} \left.\frac{x^3 \cos(kx)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{12}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx)\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{8\pi^3 (-1)^k}{k^2} - \frac{48\pi (-1)^k}{k^4}.$$

Dies ergibt für a_k

$$a_k = 30\pi\left(\frac{4\pi\left(-1\right)^k}{k^2}\right) - \frac{15}{\pi}\left(\frac{8\pi^3\left(-1\right)^k}{k^2} - \frac{48\pi\left(-1\right)^k}{k^4}\right) = \frac{720\left(-1\right)^k}{k^4}.$$

a_0 kann durch

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(30\pi^2x^2 - 15x^4 - 7\pi^4)dx = 0$$

berechnet werden.

b) (1 Punkt) Untersuchen Sie die Reihe auf

(i) Konvergenz im Quadratmittel,

(ii) punktweise Konvergenz,

(iii) gleichmäßige Konvergenz.

(i) Da $f \in L^2\left(-\pi,\pi\right)$, konvergiert die Reihe im Quadratmittel.

(ii) Die Fourierreihe konvergiert gemäß dem Dirichlet-Kriterium punktweise gegen f.

(iii) f ist stetig differenzierbar, daher konvergiert die Fourierreihe auch gleichmäßig gegen f.

c) (1 Punkt) Nach (a) ergibt sich $a_0 = 0$ und

$$a_k = \frac{720\left(-1\right)^k}{k^4}, \quad k \geq 1.$$

Berechnen Sie mithilfe dieses Ergebnisses einen Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^8}.$$

Hinweis:

$$\|f\|^2 = \frac{384\pi^9}{7}$$

Aus der Parseval'schen Gleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\|f\|^2$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{720^2}{k^8} = \frac{1}{\pi}\frac{384\pi^9}{7} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

- **Aufgabe 3.** Lösen Sie das Anfangs-Randwertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2), \quad t > 0,$$
$$u(-\pi/2, t) = u(\pi/2, t) = 0, \quad u(x, 0) = \cos(x).$$

a) (1.5 Punkt) Wählen Sie für $u(x,t)$ den Ansatz

$$u(x,t) := \varphi(x)\psi(t)$$

und zeigen Sie, dass dieser auf ein Eigenwertproblem für $\varphi(x)$,

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x), \quad \varphi(-\pi/2) = \varphi(\pi/2) = 0,$$

und eine Differentialgleichung für $\psi(t)$,

$$\dot{\psi}(t) = \lambda\psi(t)$$

führt.

Setze den Ansatz in die DGL ein und forme um:

$$\varphi(x)\dot{\psi}(t) = \varphi''(x)\psi(t) \quad \Big| \cdot \frac{1}{\varphi(x)\psi(t)}$$
$$\frac{\dot{\psi}(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} =: \lambda.$$

Die linke Seite hängt nur von t ab, die rechte Seite nur von x. Daher kann diese Gleichung nur dann für alle (x,t) erfüllt sein, falls linke und rechte Seite konstant sind. Damit folgt

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x), \quad \dot{\psi}(x) = \lambda\psi(x).$$

Weiters gilt $u(-\pi/2, t) = \varphi(-\pi/2)\psi(t) = 0 \Rightarrow \varphi(-\pi/2) = 0$ und
$u(\pi/2, t) = \varphi(\pi/2)\psi(t) = 0 \Rightarrow \varphi(\pi/2) = 0$.

b) (1.5 Punkte) Die Lösungen des Eigenwertproblems für $\varphi(x)$ haben die Form

$$\varphi_n(x) = A_n \sin(\mu_n x) + B_n \cos(\mu_n x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad -\mu_n^2 = \lambda_n.$$

Zeigen Sie, dass die Randbedingungen

$$\varphi(-\pi/2) = \varphi(\pi/2) = 0,$$

$A_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mu_n = 2n + 1$ zur Folge haben.
Bemerkung: Es gibt auch andere Lösungen, diese sind jedoch für dieses Beispiel nicht relevant.

$$\varphi_n(-\pi/2) = A_n \sin(-\mu_n\pi/2) + B_n \cos(-\mu_n\pi/2) = 0$$
$$\varphi_n(\pi/2) = A_n \sin(\mu_n\pi/2) + B_n \cos(\mu_n\pi/2) = 0$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke liefert

$$\begin{aligned} A_n \sin(-\mu_n\pi/2) + B_n \cos(-\mu_n\pi/2) &= A_n \sin(\mu_n\pi/2) + B_n \cos(\mu_n\pi/2) \\ \Leftrightarrow \quad B_n \cos(\mu_n\pi/2) &= 2A_n \sin(\mu_n\pi/2) + B_n \cos(\mu_n\pi/2) \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= 2A_n \sin(\mu_n\pi/2) \quad \Rightarrow \quad A_n = 0 \end{aligned}$$

Somit muss gelten:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\pi/2) = B_n \cos(\mu_n\pi/2) = 0 \\ \varphi_n(-\pi/2) = B_n \cos(-\mu_n\pi/2) = 0 \\ \Rightarrow \quad \mu_n\pi/2 = \pi n + \pi/2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_n = 2n+1. \end{aligned}$$

c) (1.5 Punkte) Setzen Sie für den folgenden Lösungsweg $B_n = 1$. Da

$$\psi_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}, \quad -\mu_n^2 = \lambda_n$$

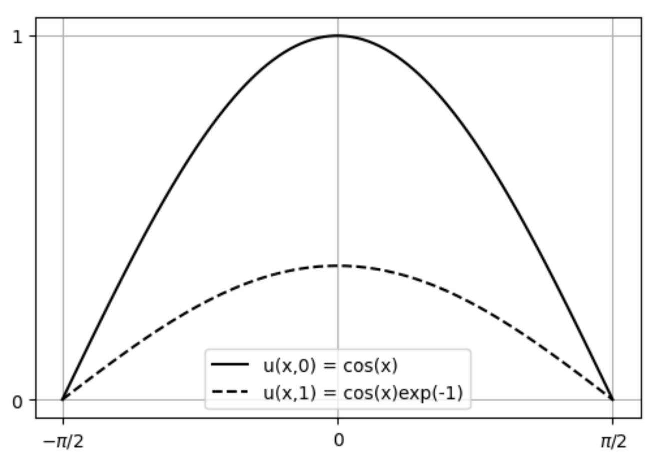
gilt, folgt für $u(x,t)$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)\psi_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos((2n+1)x) e^{-(2n+1)^2 t}.$$

Benützen Sie die Anfangsbedingungen um c_n und damit $u(x,t)$ aus einem Koeffizientenvergleich zu bestimmen.
Skizzieren Sie $u(x,0)$, $u(x,t=1)$ auf dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ und geben Sie $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ an.

$$u(x,0) = \cos(x) = c_0\cos(x) + c_1\cos(3x) + c_2\cos(5x) + \ldots$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_0 = 1, \quad c_n = 0 \quad \forall n > 0 \\ \Rightarrow u(x,t) = \cos(x)e^{-t}, \quad \lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \end{aligned}$$



d) (1.5 Punkt) Wählen Sie einen anderen Lösungsweg:

Bestimmen Sie zurest B_n aus der Normierungsbedingung

$$\langle \varphi_n\, , \, \varphi_n \rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B_n^2 \cos^2(\mu_n x) dx = 1.$$

Benutzen Sie anschließend die Anfangsbedingung um c_n und damit $u(x,t)$ zu bestimmen. Ändert sich etwas an der Lösung?

Hinweis: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(ax) dx = \frac{\sin(\pi a)+\pi a}{2a}$

$$\langle \varphi_n\, , \, \varphi_n \rangle = B_n^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2((2n+1)x) dx = B_n^2 \frac{\sin(\pi(2n+1)) + \pi(2n+1)}{2(2n+1)} = B_n^2 \frac{\pi}{2} \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \quad B_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos((2n+1)x) e^{-(2n+1)^2 t}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos((2n+1)x) \overset{!}{=} \cos(x)$$

$$\Rightarrow c_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad c_n = 0 \quad \forall n > 0$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \cos(x) e^{-t}$$

Nein, an der Lösung ändert sich nichts.