Übungen zu Analysis 2, 1. Übung

1. Man betrachte für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} + \frac{1}{x^2},$$

   und zeige, dass diese Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ wohldefiniert und stetig ist.

   Hinweis: Für die Stetigkeit betrachte man zunächst $x \in [-K, K]$ für ein $K \in \mathbb{N}$ und schreibe $f(x) = \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} + + \sum_{k=-K}^{K} \frac{1}{(x-k)^2}$. Man zeige, dass man auf die beiden Reihen das Weierstraß Kriterium anwenden kann.

2. Mit der Notation aus dem Beispiel 2 der elften Übung Analysis 1 definiere eine Abbildung $\chi : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ durch

$$\chi(z, w) := d_2\big(\tau(z), \tau(w)\big), \ z, w \in \overline{\mathbb{C}},$$

   wobei d_2 für die euklidische Metrik auf $S \subseteq \mathbb{R}^3$ steht und wobei $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (∞ ist ein Element, das nicht in $\mathbb{C}$ enthalten ist) und wobei τ die Erweiterung von $\tau : \mathbb{C} \to S \setminus \{N\}$ ist, indem man noch $\tau(\infty) = N$ setzt.

   Zeigen Sie, dass $(\overline{\mathbb{C}}, \chi)$ ein metrischer Raum ist (die sogenannte chordale metrik), der obendrein kompakt ist. Zeigen Sie auch, dass $\mathbb{C}$ als Teilmenge von $\overline{\mathbb{C}}$ offen ist.

   Schließlich zeige man für eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein z aus $\mathbb{C}$, dass $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ bezüglich der Metrik d_2 auf $\mathbb{C}$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ in $\overline{\mathbb{C}}$ bezüglich der chordalen Metrik χ, und dass $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ bezüglich χ genau dann wenn $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ im Sinne der Analysis 1.

3. Bekannterweise ist $\sin x$ als Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ entwickelbar. Man verwende das Taylorsche Restglied um folgende Fragestellung zu beantworten:

   Wie groß muss man n wählen, sodass die Differenz des n-ten Taylorpolynomes von $\sin x$ zur Funktion $\sin x$ auf $[-3, 3]$ höchstens 10^{-6} beträgt?

4. Man zeige, dass ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

   für $0 \leq x < 1$, indem man zeigt, dass das Taylorsche Restglied gegen Null konvergiert.

   Anmerkung: Die Gleichheit gilt auch für $-1 < x < 0$, denn die Potenzreihe $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ hat Konvergenzradius 1 und stimmt für $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $(1+x)^\alpha$ überein. Nun kann man mit Hilfe des Weierstrasskriterium zeigen, dass $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ bei festem $x \in (-1, 1)$ stetig in α ist, wenn α in einer

beliebigen kompakten Menge der Form $[-K, K]$ läuft. Da $(1+x)^\alpha$ und $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ stetige Funktionen in α sind und auf der dichten Menge $[-K, K] \cap \mathbb{Q}$ übereinstimmen, müssen sie auf ganz $[-K, K]$ übereinstimmen.

5. Man betrachte die Funktion $f(x) = x^3 + 1 : [0,1] \to [0,1]$. Wählen Sie $n+1$ äquidistante Stützstellen, und berechnen Sie zur entsprechenden Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ von $[0,1]$ die Ober- und die Untersummen, sowie $\lim_{n\to\infty} O(\mathcal{Z}_n)$, $\lim_{n\to\infty} U(\mathcal{Z}_n)$.

   Hinweis: $4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2$.

6. Eine reellwertige Funktion f, die auf einem Intervall I definiert ist, heißt konvex, wenn sie für beliebige Punkte $x_1, x_2 \in I$ und beliebige $\lambda \in [0,1]$ immer folgende Ungleichung erfüllt:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

   Beweisen Sie, dass diese Bedingung zur folgenden äquivalent ist:

   Für alle Punkte $x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

   Weiters zeigen Sie, dass diese Gleichung wiederum äquivalent zur folgenden für $x_1 < x < x_2$ ist:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

   Was bedeutet die Bedingung konvex zu sein geometrisch?

   Bemerkung: Eine Funktion f heißt konkav, wenn $-f$ konvex ist.

7. Mit der Notation aus dem letzten Beispiel zeigen Sie für ein konvexes f, dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

   wenn $x, x_1, x_2 \in I$ nur drei paarweise verschiedene Punkte mit $x_1 < x_2$ sind. Leiten Sie daraus dann die Stetigkeit einer jeden konvexen Funktion her!

8. Sei f eine reellwertige stetige Funktion, die auf einem Intervall I definiert ist und die im Inneren von I ableitbar ist. Man beweise, dass f genau dann konvex ist, wenn ihre Ableitung f' wachsend ist ($x \leq y \Rightarrow f'(x) \leq f'(y)$).

   Wenn für f noch zusätzlich die zweite Ableitung im Inneren von I existiert, wie lässt sich dann die Konvexität durch f'' charakterisieren?

   Hinweis: Für die $\Rightarrow$ Richtung verwende man die Gleichung aus dem letzten Beispiel. Für die andere Richtung verwende man den Mittelwertsatz.

9. Führen Sie bei der Funktion $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}$ mit $f(0) = 0$ eine Kurvendiskussion durch.

   Bestimmen Sie also Nullstellen, lokale (globale Extrema), auf welchen Teilintervallen die Funktion (streng) monoton wachsend bzw. fallend ist,

Wendpunkte, also Stellen, wo die erste Ableitung der Funktion ein lokales Extremum hat. Bestimmen Sie auch auf welchen Teilintervallen die Funktion konvex bzw. konkav ist!

10. Führen Sie bei der Funktion $f_2(x) = x^3 - \frac{48}{x},\ x \neq 0$ eine Kurvendiskussion durch.

    Bestimmen Sie also Nullstellen, lokale (globale Extrema), auf welchen Teilintervallen die Funktion (streng) monoton wachsend bzw. fallend ist, Wendpunkte, also Stellen, wo die erste Ableitung der Funktion ein lokales Extremum hat. Bestimmen Sie auch auf welchen Teilintervallen die Funktion konvex bzw. konkav ist!