Übungen zu Analysis 2, 9. Übung

Wir wollen vorausschicken, dass Wegintegrale $\int_\gamma \phi(x)\ dx$ von Vektorfeldern $\phi : D \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, dh. $\phi((\xi,\eta)^T) = (P(\xi,\eta), Q(\xi,\eta))$, in der klassischen Literatur als

$$\int_\gamma P(\xi,\eta)\ d\xi + Q(\xi,\eta)\ d\eta$$

geschrieben werden. Entsprechend schreibt man Wegintegrale $\int_\gamma \phi(x)\ dx$ von Vektorfeldern $\phi : D \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, dh. $\phi((\xi,\eta,\zeta)^T) = (P(\xi,\eta,\zeta), Q(\xi,\eta,\zeta), R(\xi,\eta,\zeta))$ als

$$\int_\gamma P(\xi,\eta,\zeta)\ d\xi + Q(\xi,\eta,\zeta)\ d\eta + R(\xi,\eta,\zeta)\ d\zeta.$$

1. Sei $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma_2 : [1,2] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_3 : [0,2] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_3(t) = \gamma_1(t),\ t \in [0,1)$ und $\gamma_3(t) = \gamma_2(t),\ t \in [1,2]$. Es gilt nicht notwendigerweise $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$! Weiters sei γ_1 bei 1 stetig, und seien γ_1 und γ_2 rektifizierbar.

   Man zeige, dass dann auch γ_3 rektifizierbar ist mit $\ell(\gamma_3) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) + \|\gamma_2(1) - \gamma_1(1)\|_2$!

   Hinweis: Man zeige zunächst, dass $\lim_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z},1\in\mathcal{Z}} \|\gamma_2(1) - \gamma_1(\xi_{j(\mathcal{Z})})\|_2 = \|\gamma_2(1) - \gamma_1(1)\|_2$ und dass $\lim_{\mathcal{Z}\in\mathfrak{Z},1\in\mathcal{Z}} \|\gamma_1(1) - \gamma_1(\xi_{j(\mathcal{Z})})\|_2 = 0$, wobei $\mathfrak{Z}$ die Menge aller Zerlegungen von $[0,2]$ ist, und $\xi_{j(\mathcal{Z})}$ das größte Element von $\mathcal{Z}$ ist, dass kleiner 1 ist.

2. Man betrachte $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ist f rektifizierbar, so sagt man in diesem Fall ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$), dass die Funktion f von beschränkter Variation ist, und setzt $V_x^y(f) := \ell(f|_{[x,y]})$, wenn $a \le x \le y \le b$.

   Man zeige:

   - Sind f, g von beschränkter Variation und $\lambda \in \mathbb{R}$, so auch $f + g$ und λf, wobei $V_x^y(f+g) \le V_x^y(f) + V_x^y(g)$ und $V_x^y(\lambda f) = |\lambda| V_x^y(f)$.
   - Ist f monoton steigen, so gilt $V_x^y(f) = f(y) - f(x)$.
   - Ist f Differenz zweier monoton steigender Funktionen, so ist f von beschränkter Variation.
   - Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, so ist f die Differenz $g - h$ zweier monoton steigender Funktionen.

   Hinweis: Setze $g(t) = V_a^t(f)$ und zeige von h, dass es dann monoton wächst!

3. Man gebe eine Formel für die Länge des Weges $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ an, der durch $\gamma(t) = (f(t)\cos t, f(t)\sin t)^T$ definiert ist, wobei $f \in C^1$.

   Man berechne die Bogenlänge speziell für $f(t) = t$ (Archimedische Spirale)!

4. Man betrachte den Weg im $\mathbb{R}^3$ mit folgender Parameterdarstellung (Schraubenlinie):

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}, \ t \in [0, 4\pi]$$

Hierbei seien $r, h > 0$ fest gewählt. Zeichnen Sie eine Skizze! Weiters berechne man die Bogenlänge, und parametrisiere $\gamma(t)$ nach der Bogenlänge um. Daher schreibe $\gamma(t)$ als $\gamma(t(s))$, sodass die Bogenlänge der Kurve von $\gamma(0)$ bis $\gamma(t(s))$ genau s ist.

5. Man berechne das Wegintegral $\int_\gamma ((x^2 + 5y + 3yz)dx + (5x + 3xz - 2)dy + (3xy - 4z)dz)$, wobei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \ \gamma(t) = (\sin(t), \cos(t), t)^T$.

6. Man berechne das Wegintegral $\int_\gamma \phi(x)\ dx$, wobei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \ \gamma(t) = (\sqrt{t}, t)^T$ und $\phi : \mathbb{R}^2 \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^{2\times 2}, \ \phi((x, y)^T) = \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ x & y \end{pmatrix}$.

7. Ist das Vektorfeld $\mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1\times 3}, \ \phi((\xi, \eta, \zeta)^T) = (\xi + \zeta, \xi + \eta + \zeta, \xi + \zeta)$ ein Gradientenfeld? Falls ja, berechne man die Stammfunktion, also ein f, sodass $df = \phi$!

8. Man betrachte $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\phi : D \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ definiert durch $\phi((x, y)^T) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.

   Man berechne zunächst das Wegintegral dieser Funktion über den in positiver Richtung durchlaufenen Einheitskreis ($\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T, \ 0 \le t \le 2\pi$)!

   Nun zeige man, dass auf D die Bedingung (11.8) aus dem Skriptum erfüllt ist und zeige, dass es auf der rechten offenen Halbebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y)^T : x \le 0\}$ eine reellwertige Funktion $f \in C^1$ gibt, sodass dort $df = \phi$.

   Kann es so eine Funktion f auf ganz D geben?

9. Im einfach zusammenhängenden Gebiet $G = \{(\xi, \eta, \zeta)^T \in \mathbb{R}^3 : \eta > 0, \zeta > 0\}$ sei $K : G \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{1\times 3}$ durch

$$K(\xi, \eta, \zeta) = \left(\ln(\zeta\eta), \frac{\xi}{\eta}, \beta\frac{\xi}{\zeta}\right),$$

   mit einem festen $\beta \in \mathbb{R}$ definiert. Für welchen Wert von β ist K ein Gradientenfeld?

   Für die geradlinige Verbindung γ von $(0, 1, 1)^T$ nach (ξ_0, η_0, ζ_0) in G berechne man man das Wegintegral $\int_\gamma K(x)\ dx$ in den Fällen $\beta = 1$ und $\beta = 2$.