8. Übungen Analysis 2, 14. 5. 2013

1. Seien $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2,\ i = 1, \ldots, n$ Messdaten, wobei zumindest drei verschiedene x_i auftreten. Man bestimme eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ so, dass der quadratische Abstand

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

minimal wird!

Hinweis: Um zu sehen, dass die beim Bestimmen der stationären Punkte auftretende Matrix A regulär ist, nehme man $A\vec{x} = 0$ an. Dann zeige man, dass der Ausdruck $\vec{x}^T A\vec{x}$ als Summe von Quadraten geschrieben werden kann.

2. Seien $x_1, \ldots, x_n$ Winkeln mit $x_j \in (0, 2\pi)$, sodass $x_1 + \cdots + x_n = 2\pi$. Ist nun $P_j = e^{i \sum_{l=1}^{j-1} x_l},\ j = 1, \ldots, n$ (i ist die imaginäre Konstante), so stellt $\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_{n-1}P_n}, \overrightarrow{P_nP_1}$ ein n-Eck dar.

Man bestimme die Winkel x_j so, dass der Flächeninhalt dieses n-Eckes maximal ist. Man verwende dabei die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren!

3. Berechnen Sie das Minimum der Funktion $f(r, s, t, u) = r + s + t + u$ unter den Nebenbedingungen $r^2 + s^2 = 1$ und $rstu = 1$ für $r, s, t, u > 0$.

4. Man berechne die Länge der Wege $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$:

$$\gamma(t) = (t, t^{\frac{3}{2}})^T,\ \gamma(t) = (t, \cosh(t))^T,$$

und gebe die zu den γ's äquivalente Wege γ' an, wobei der Parameter von γ die Bogenlänge ist.

5. Man zeige, dass $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(t) = (t, t^2 \cos \frac{\pi}{t^2})^T, t > 0$ zwar stetig, aber nicht rektifizierbar ist.

Hinweis: Berechne $L(\mathcal{Z})$ für $\mathcal{Z} = \{0, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\}$.

6. Sei der Weg $\gamma :\ [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und zeigen Sie so, dass das Vektorfeld $(\mathrm{Re}(\frac{1}{z}), \mathrm{Im}(\frac{1}{z}))^t$ nicht wegunabhängig in $\mathbb{C} \setminus \{0\} \sim \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist.

7. Man betrachte $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ist f rektifizierbar, so sagt man in diesem Fall ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$), dass die Funktion f von beschränkter Variation ist, und setzt $V_x^y(f) := \ell(f|_{[x,y]})$, wenn $a \le x \le y \le b$.

Man zeige:

- Sind f, g von beschränkter Variation und $\lambda \in \mathbb{R}$, so auch $f + g$ und λf, wobei $V_x^y(f + g) \le V_x^y(f) + V_x^y(g)$ und $V_x^y(\lambda f) = |\lambda| V_x^y(f)$.

- Ist f monoton steigen, so gilt $V_x^y(f) = f(y) - f(x)$.
- Ist f Differenz zweier monoton steigender Funktionen, so ist f von beschränkter Variation.

8. Man zeige: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, so ist f die Differenz $g - h$ zweier monoton steigender Funktionen.

   Hinweis: Setze $g(t) = V_a^t(f)$ und zeige von h, dass es dann monoton wächst!

9. Man gebe eine Formel für die Länge des Weges $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ an, der durch $\gamma(t) = (f(t)\cos t, f(t)\sin t)^T$ definiert ist, wobei $f \in C^1$.

   Man berechne die Bogenlänge speziell für $f(t) = t$ (Archimedische Spirale)!

10. Man berechne das Wegintegral $\int_\gamma ((x^2 + 5y + 3yz)dx + (5x + 3xz - 2)dy + (3xy - 4z)dz)$, wobei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = (\sin(t), \cos(t), t)^T$.