Übungen zu Analysis 2, 11. Übung 11. 6. 2013

Zeigen Sie:

1. Für jede Pseudometrik d auf einer Menge X sind die Mengen

$$U_r(x) := \{y \in X : \ d(x,y) < r\}, \ r > 0, \ x \in X,$$

   Basis einer Topologie.

   Eine Abbildung $d : \ X \times X \to \mathbb{R}_+$ heißt Pseudometrik, wenn $d(x,x) = 0$, $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$, $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ gilt. Eine Pseudometrik ist also eine Metrik wenn zusätzlich $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ gilt.

2. $\bar{E} = ((E^{\complement})^{\circ})^{\complement}$ und $\partial E = (E^{\circ} \cup (E^{\complement})^{\circ})^{\complement}$.

3. Für Teilmengen $A \subseteq B$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ gilt $A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$ und $\bar{A} \subseteq \bar{B}$. Für Teilmengen A_i von X gilt $\cap_{i=1}^n A_i^{\circ} = (\cap_{i=1}^n A_i)^{\circ}$ und $\cup_{i=1}^n \bar{A}_i = \overline{(\cup_{i=1}^n A_i)}$.

   Gelten diese Aussagen auch für unendl. Vereinigungen resp. Durchschnitte?

4. In einem topologischen Raum ist eine Teilmenge A genau dann offen, wenn $A \cap \partial A = \emptyset$ gilt. Es gilt $\bar{A} = A \cup \partial A$

5. Auf $\mathbb{R}$ sind die halboffenen Intervalle $[a,b)$ für $a < b$ Basis einer Topologie $\mathcal{T}_h$ in der die Elemente dieser Basis offen und abgeschlossen sind. Charakterisieren Sie den Abschluss bez. $\mathcal{T}_h$ einer Teilmenge A von $\mathbb{R}$ durch Grenzwerte von Folgen. Eine Funktion von $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_h)$ nach $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie ist genau dann stetig, wenn sie rechtsseitig stetig ist. (Eine Funktion auf $\mathbb{R}$ heißt rechtsseitig stetig in x_0, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \geq x_0 \ \forall n$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim f(x_n) = f(x_0)$ mit allen Grenzwerten in dieser Definition bez. der nat. Top.)

6. Sei X eine Menge und sei eine Abbildung $A \mapsto \bar{A}$ auf $\mathcal{P}(X)$ in sich definiert (genannt Abschlussoperator), die

   i) $\emptyset = \bar{\emptyset}$
   ii) $\bar{\bar{A}} = \bar{A} \quad \forall A \subseteq X$
   iii) $\bar{A} \supseteq A \quad \forall A \subseteq X$
   iv) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B} \quad \forall A, B \subseteq X$

   erfüllt. Dann ist die Menge $\{A^{\complement} : \ \bar{A} = A \subseteq X\}$ eine Topologie auf X in der genau die Mengen A mit $A = \bar{A}$ abgeschlossen sind.

7. Ein topologischer Raum X ist genau dann ein Hausdorffraum, wenn für alle $x \in X$ die Menge $\{x\}$ der Durchschnitt aller abgeschlossenen Umgebungen von x ist.

8. Ein Ultrafilter auf einem Hausdorffraum ist entweder konvergent oder er besitzt keinen Häufungspunkt.

9. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, so ist $F_n := \{x_i : i \geq n\}$ Filterbasis eines Filters $\mathcal{F}$. Dieser konvergiert genau dann gegen x_0, wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0 konvergiert.

   Ist $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in X so ist $F_i := \{x_j : j \succcurlyeq i\}$ Filterbasis eines Filters $\mathcal{F}$. Dieser konvergiert genau dann gegen x_0, wenn das Netz $(x_j)_{j\in I}$ gegen x_0 konvergiert.