Übungen zu Analysis 2, 12. (letzte) Übung 18. 6. 2013

4. Übungstest 28. 6. 18:00 – 19:30 HS 8 Heinz Parkus (Hauptgeb. Stiege 7)

Zeigen Sie:

1. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann ein Hausdorffraum, wenn die Diagonale $\Delta := \{(x, x) : x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times X$ (versehen mit der Produkttopologie) ist.

2. Für eine stetige Abbildung f von einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ in einen Hausdorffraum $(Y, \mathcal{T}')$ ist der Graph
$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in X\}$$
abgeschlossen in $(X \times Y)$ mit der Produkttopologie.

   Hinw. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\zeta : X \times Y \to Y \times Y,\ (x, y) \mapsto (f(x), y)$ stetig ist und verwenden Sie das vorherige Beispiel.

3. Die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}^2$ stimmt auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie überein. Sei auf $\mathbb{R}^2$ (mit der nat. Topologie) eine Relation R durch $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ definiert. Dann ist $\mathbb{R}^2/R$ mit der Quotiententopologie homöomorph zu $\mathbb{R}$.

4. Auf $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0, 1\} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ist eine Metrik durch $d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|3^{-i}$ definiert. Die von dieser Metrik induzierte Topologie ist die Produkttopologie und für $x, y, z \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ folgt aus $d(x, y) = d(x, z)$: $y = z$.

5. Sei $(Y_1, \mathcal{T}_1)$ ein topologischer Raum und q_1 eine Abbildung von Y_1 auf eine Menge Y_2 und q_2 eine Abbildung von Y_2 auf eine Menge Y_3 (q_1 und q_2 sind also surjektiv!) Sei $\mathcal{T}_2$ die durch q_1 induzierte Finaltopologie auf Y_2. Dann ist die durch $q_2 \circ q_1$ und $(Y_1, \mathcal{T}_1)$ induzierte Finaltopologie auf Y_3 genau die durch q_2 und $(Y_2, \mathcal{T}_2)$ induzierte Finaltopologie.

6. Ist f eine Abbildung von X nach Y und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf X, so ist $f(\mathcal{U}) := \{f(F).\ F \in \mathcal{U}\}$ Filterbasis eines Ultrafilters in Y.

7. Auf der Menge $\beta\mathbb{N}$ aller Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ bilden die Mengen $O_A := \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{U}\}$ für $A \subseteq \mathbb{N}$ eine Basis einer Hausdorfftopologie $\mathcal{T}$ in der alle Mengen O_A sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

8. In einem metrischen Raum ist eine Teilmenge A genau dann totalbeschränkt, wenn jede Folge in A eine Teilfolge besitzt, die Cauchyfolge ist.

9. Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Dann ist X unter keiner echt feineren Topologie kompakt und unter keiner echt gröberen Topologie ein Hausdorffraum.