ANALYSIS 2 TM, SS 13, TEST 4: AUSARBEITUNG

Inhaltsverzeichnis

1 A) und B)

Angabe: : Man gebe alle reellen α bzw. β an, für die $f(x,y)$ ein Gradientenfeld im $\mathbb{R}^2$ ist. Dabei ist

(A) $f(x,y) = (\alpha \sin y + 2xy, (1-\alpha)x\cos y + x^2 - \sin y)^t$ bzw.
(B) $f(x,y) = (e^y + y, xe^y + \beta x + y)^t$.

Lösung:

Beh 1:: *Ist f Gradientenfeld, so muß $\alpha = \frac{1}{2}$ bzw. $\beta = 1$ gelten*

BW.: Das Feld ist C^2 somit muß, falls $f = (P,Q)^t$ gilt, die Integrabilitätsbedingung $P_y = Q_x$ gelten. Im Falle **A)** führt dies auf

$$\alpha \cos y + 2x = (1-\alpha)\cos y + 2x$$

also $\alpha = \frac{1}{2}$, im Falle **B** auf

$$e^y + 1 = e^y + \beta + 1$$

also $\beta = 1$.

Beh 2:: *Für die angegebenen Werte von α/β liegt ein Gradientenfeld vor.*

BW.: Da f überall im $\mathbb{R}^2$ definiert ist, und $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist, sind die Integrabilitätsbedingungen auch hinreichend.

Beh 3:: *Es ergibt sich als Wert von $\int_\gamma f(z)\,dz$ der Wert* **A)** $\frac{a\sin b}{2} + a^2 b + \cos b - 1$ *bzw.* **B)** $ae^b + ab + \frac{b^2}{2}$.

BW.: Wegeunabhängigkeit erlaubt es das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$ über einen Hakenweg von $(0,0)$ über $(x,0)$ nach (x,y) zu erstrecken:

$$\int_0^a P(\xi,0)\,d\xi + \int_0^b Q(a,\eta)\,d\eta$$

A) $\int_0^a 0\,d\xi + \int_0^b (\frac{a}{2}\cos\eta + a^2 - \sin\eta)\,d\eta = \cdots = \frac{a\sin b}{2} + a^2 b + \cos b - 1$.
B) $\int_0^a 1\,d\xi + \int_0^b (ae^\eta + a + \eta)\,d\eta = \cdots = ae^b + ab + \frac{b^2}{2}$.

Alternative: Man berechnet einen Kandidaten $V(x,y)$ für ein Potential, zeigt, dass dessen Gradient $f(x,y)$ ist und bestimmt $V(a,b) - V(0,0)$ als Wert des Kurvenintegrals.

2 A) und B)

Angabe: Es seien X und Y topologische Räume. Dann ist die Abbildung

A) $f : X \times Y \to Y \times X \times Y$, gegeben durch $f(x, y) := (y, x, y)$
B) $f : X \times Y \to Y \times X \times X$, gegeben durch $f(x, y) := (y, x, x)$
stetig.

Lösung: Laut Vorlesung ist eine Abbildung $f : A \to \prod_i Y_i$ genau dann stetig, wenn alle $p_i \circ f$ stetig sind. Es ist $A := X \times Y$ und es gibt drei Projektionen p_i. Weiters weiß man, dass die Projektionen $p_X : X \times Y \to X$ und $p_Y : X \times Y \to Y$ jeweils stetig sind. Es ergeben sich nun $p_1 \circ f = p_Y$, $p_2 \circ f = p_X$ und $p_3 \circ f$ ist in **A)** gleich der Abbildung p_Y bzw. in **B)** gleich p_X. Da somit alle $p_i \circ f$ stetig sind, ist es auch f.