Analysis II Übung - Blatt 8, für den 20. 05. 2014

57. Sei $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Im(z) > 0\}$.

    (a) Zeigen Sie: Es gibt keine stetige Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit $(f(z))^2 = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$.

    (b) Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{C}^+)$ für $f(z) := z^2$ und skizzieren Sie die Bildkurven der achsenparallelen Geraden, d.h. für $\Re(z)$ bzw. $\Im(z)$ konstant.

58. Untersuchen Sie, ob folgende aus dem reellen bekannte Funktionen eine holomorphe Fortsetzung auf D besitzen:

    (a) $f(x) := \sin(x)$ für $D = \mathbb{C}$,

    (b) $f(x) := \sqrt{x}$ für $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

    (c) $f(x) := |x|$ für $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

    (d) $f(x) := \frac{1}{x}$ für $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

59. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Zeigen Sie: Dann existiert eine harmonische Funktion $v : G \to \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f := u + iv : G \to \mathbb{C}$ holomorph ist. v ist bis auf eine additive reelle Konstante eindeutig bestimmt.

60. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$g(z) := \overline{f(\overline{z})}, \qquad z \in G^* := \{z \in \mathbb{C},\ \overline{z} \in G\}$$

    holomorph auf G^* ist.

61. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph: Zeigen Sie, dass jeweils eine der folgenden Bedingungen ausreicht, damit f konstant auf G ist.

    (a) $\Re(f)$ ist konstant auf G,

    (b) $\Im(f)$ ist konstant auf G,

    (c) $|f|$ ist konstant auf G,

    (d) $\mathrm{Arg}(f)$ ist konstant auf G.

62. Sei f eine nicht konstante, ganze Funktion. Dann ist $f(\mathbb{C}) := \{f(z) \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}\}$ dicht in $\mathbb{C}$.

63. Sei $r > 0$ und C_r der positiv durchlaufende Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. Berechnen Sie für $r \neq 1$

    (a) $\int_{C_r} \frac{(2+i)z^2+(4+3i)z+3+i}{z^3+(2-i)z^2+(1-2i)z-i} dz$ und

    (b) $\int_{C_r} \frac{1}{(z-a)^2(z-b)^m} dz$ mit $|a| < r < |b|$ und $m \in \mathbb{N}$.

64. Berechnen Sie die Residuen $\operatorname{Res}_{z_0} f$ für

(a) $f(z) := \frac{\sin(z)}{z^4}$ mit $z_0 := 0$ und

(b) $f(z) := \frac{1}{z^n - 1}$ mit $z_0 := 1$ und $n \in \mathbb{N}$.