Analysis 2, 2. UE-Test, Gruppe A

1. Beispiel: Sei $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in Matrixdarstellung gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Abbildungsnorm von A, wenn man $\mathbb{R}^2$ vorne mit $\|.\|_\infty$ und hinten mit $\|.\|_1$ versieht.
Berechnen Sie auch die $\|.\|_1$- und die $\|.\|_\infty$-Norm von A, wenn man $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit dem $\mathbb{R}^4$ identifiziert.

Lösung: Für die Abbildungsnorm einer linearen Abbildung $A : X \to Y$ zwischen zwei normierten Räumen $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ gilt

$$\|A\| = \sup \left\{ \|Ax\|_Y : x \in X, \|x\|_X = 1 \right\}.$$

In unserem Fall gilt $(X, \|.\|_X) = (\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ und $(Y, \|.\|_Y) = (\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$, und für einen beliebigen Vektor $x = (x_1, x_2)^T$ mit $\|x\|_\infty = 1$ folgt

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= |x_1 + 3x_2| + |-x_1| \leq |x_1| + 3|x_2| + |x_1| \\ &\leq 5 \max\{|x_1|, |x_2|\} = 5\|x\|_\infty = 5, \end{aligned}$$

was die Ungleichung $\|A\| \leq 5$ impliziert. Für die andere Ungleichung betrachte den speziellen Vektor $x = (1, 1)^T$, der natürlich $\|x\|_\infty = 1$ erfüllt, und folgere

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup \left\{ \|Ax\|_1 : x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_\infty = 1 \right\} \\ &\geq \left\| A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_1 = |1 + 3| + |-1| = 5, \end{aligned}$$

da wir nun einen speziellen Vektor genommen haben, der in der Supremumsbildung vorkommt. Insgesamt haben wir also $\|A\| = 5$ gezeigt.

Um $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit dem $\mathbb{R}^4$ zu identifizieren, schreiben wir die Matrix A um in einen Vektor $\tilde{A} = (1, -1, 3, 0)^T$ (oder auch $\hat{A} = (1, 3, -1, 0)^T$) und berechnen

$$\|\tilde{A}\|_1 = |1| + |-1| + |3| + |0| = 5$$

und

$$\|\tilde{A}\|_\infty = \max\{|1|, |-1|, |3|, |0|\} = 3.$$

2. Beispiel: Begründen Sie, warum die Funktion

$$g : x \mapsto \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

als Funktion von $(0, +\infty)$ nach $\mathbb{R}$ wohldefiniert (d.h. für $x \in (0, +\infty)$ existiert das Integral) und stetig ist!

Lösung: Wir müssen das Integral als uneigentliches Integral bei ∞, d.h. als

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_1^{\alpha} e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

auffassen. Bemerke außerdem, dass t^{x-1} für $t \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$t^{x-1} := \exp\left((x-1)\ln t\right).$$

Um Wohldefiniertheit und Stetigkeit zu zeigen, wollen wir als Vorarbeit den Integranden entsprechend abschätzen. Sei dafür $[a, b] \subseteq (0, +\infty)$ fest derart, dass $x \in [a, b]$. Es gilt

$$\lim_{t \to \infty} \frac{e^{-t} t^{x-1}}{t^{-2}} = \lim_{t \to \infty} e^{-t} t^{x+1} = 0,$$

was man z.B. durch $\lfloor x \rfloor + 2$-maliges Anwenden der Regel von de l'Hospital zeigen kann. Daher existiert ein $t_0 \in [1, +\infty)$, sodass $\frac{e^{-t} t^{x-1}}{t^{-2}} \leq 1$ für alle $t \geq t_0$. Da die Funktion $t \mapsto \frac{e^{-t} t^{b-1}}{t^{-2}}$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen auf dem Kompaktum $[1, t_0]$ selber stetig ist, ist sie dort auch beschränkt. Insgesamt erhalten wir also

$$e^{-t} t^{x-1} \leq e^{-t} t^{b-1} \leq C t^{-2}$$

für alle $t \in [1, +\infty)$ mit einer Konstanten $C \geq 1$, die unabhängig von x ist.

Somit können wir nun die Wohldefiniertheit des Integrals zeigen: Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \to \infty} \int_1^{\alpha} e^{-t} t^{x-1}\, dt &\leq \lim_{\alpha \to \infty} C \int_1^{\alpha} t^{-2}\, dt \\ &= \lim_{\alpha \to \infty} (-t^{-1})|_1^{\alpha} = \lim_{\alpha \to \infty} -\frac{1}{\alpha} + 1 = 1, \end{aligned}$$

womit wir für unser ursprüngliches Integral eine konvergente Majorante gefunden haben. Somit ist die Wohldefiniertheit gezeigt.

Um die Stetigkeit zu zeigen, gehen wir folgendermaßen vor: Offenbar ist die Funktion

$$f(t,x) := e^{-t}t^{x-1}$$

als Zusammensetzung stetiger Funktionen auf $[1,n] \times [a,b]$ stetig, wobei $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz über Parameterintegrale (Korollar 8.7.9) sind dann auch die Funktionen $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) := \int_1^n e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

stetig. Man beachte hier, dass der Integrand stetig auf dem Produkt zweier kompakter Mengen sein muss! Wir wollen jetzt zeigen, dass die Funktionenfolge g_n gleichmäßig gegen die gegebene Funktion g konvergiert. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned}
\|g_n - g\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_1^n e^{-t}t^{x-1}\,dt - \int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \right| \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \lim_{\alpha\to\infty} \int_n^\alpha e^{-t}t^{x-1}\,dt \\
&\leq \lim_{\alpha\to\infty} \int_n^\alpha Ct^{-2} = C\frac{1}{n},
\end{aligned}$$

was für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Somit konvergiert die Funktionenfolge g_n auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen die Funktion g. Da gleichmäßige Konvergenz die Stetigkeit erhält, ist somit auch g stetig für $x \in [a,b]$. Da man für jedes $x \in (0,+\infty)$ eine kompakte Menge findet, die x enthält und noch ganz in $(0,+\infty)$ enthalten ist, folgt die Stetigkeit der Funktion g auf ihrem gesamten Definitionsbereich.