

---

## Fehlerkorrigierende Codes, Übungen

Sommersemester 2014

---

### Beispiele für die Übungen am 13.3.2014

1. Man überlege, warum der EAN-Code Übertragungsfehler der Form  $1a \rightarrow a0$ ,  $a \in \{2, 3, \dots, 9\}$ , immer erkennen kann.
2. Sei  $a_1 a_2 \dots a_{10}$  die Dezimaldarstellung einer Sozialversicherungsnummer. Die Ziffern sind dabei so gewählt, dass deren gewichtete Summe

$$8a_1 + 4a_2 + 2a_3 + a_4 + 6a_5 + 3a_6 + 7a_7 + 9a_8 + 10a_9 + 5a_{10}$$

stets durch 11 teilbar ist. Zeigen Sie, dass man damit Einzelfehler sowie beliebige Vertauschungen von zwei (nicht notwendig benachbarten) Stellen erkennen kann. (Würde dies auch mit Teilbarkeit durch 12 anstelle von 11 funktionieren?)

3. Eine Prüfzeichen-Codierung über  $\mathbb{Z}_p$  besteht aus  $n$  Permutationen  $f_1, \dots, f_n$  von  $\mathbb{Z}_p$  und einem Element  $c \in \mathbb{Z}_p$ . Dabei wird ein Wort  $a_1 \dots a_{n-1} \in \mathbb{Z}_p^{n-1}$  so um ein Prüfzeichen  $a_n$  erweitert, dass die Kontrollgleichung

$$f_1(a_1) + \dots + f_n(a_n) \equiv c \pmod{p}$$

erfüllt ist.

Man zeige: Eine Prüfziffer-Codierung erkennt genau dann alle Nachbar-Transpositionen

$$a_1 \dots a_j a_{j+1} \dots a_n \longrightarrow a_1 \dots a_{j+1} a_j \dots a_n$$

wenn für alle  $x, y \in \mathbb{Z}_p$ ,  $x \neq y$ , und für alle  $i = 1, \dots, n-1$  gilt

$$f_{i+1}(f_i^{-1}(x)) - x \neq f_{i+1}(f_i^{-1}(y)) - y.$$

4. Eine Funktion  $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$  heißt Orthomorphismus von  $\mathbb{Z}_p$ , wenn  $f(x)$  und  $f(x) - x$  Permutationen sind.

Man zeige: Es existiert genau dann eine Prüfzeichen-Codierung über  $\mathbb{Z}_p$ , die jede Nachbar-Transposition erkennt, wenn es einen Orthomorphismus von  $\mathbb{Z}_p$  gibt.

Auf welchen Orthomorphismen basieren Sozialversicherungsnummer bzw. ISBN?

5. Für den Code 5) aus den einführenden Beispielen
  - (a) decodiere man die Empfangswörter 10010 bzw. 00111,
  - (b) überlege man, dass kein einziger Fehler an zwei Stellen (in eindeutiger Weise) richtig korrigiert werden kann.