Fehlerkorrigierende Codes, Übungen

Sommersemester 2014

Beispiele für die Übung am 10.4.2014, 14:45 – 16:15

16. Konstruieren Sie einen selbstdualen Binärcode C (d.h. $C = C^{\perp}$) der Länge 8, der mind. 1 Fehler korrigieren kann. Gibt es solch einen Code auch schon mit der Länge 6?

17. Man bestimme — ohne Berechnung von Syndromen — ein Standardkorrekturschema für den binären Code mit Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und decodiere die Empfangsworte 111 011 und 111 111.

18. Gegeben sei ein Code über $\mathbb{Z}_3$ durch seine Kontrollmatrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme die Syndrome aller Nebenklassenanführer vom Gewicht 1 und decodiere die Empfangsworte 211122 und 111010.

Wir betrachten folgendes Spiel: Jedem Mitglied eines n-elementigen Teams wird per Zufallsgenerator eine 0 oder 1 zugeordnet (jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2). Nach der Zuordnung kann jedes Mitglied des Teams sehen, welche Zahlen den anderen Mitgliedern zugeordnet wurden, seine eigene Zahl ist ihm nicht bekannt. Zu einer vorgegebenen Zeit müssen die Team-Mitglieder gleichzeitig raten, welche Zahl ihnen selbst zugeordnet wurde. Dabei können sie sich allerdings auch der Stimme enthalten. Das Team gewinnt genau dann, wenn mindestens ein Spieler seine Zahl errät und kein Spieler falsch rät. Zwischen den Mitgliedern des Teams ist nach der Zuordnung der Zahlen keinerlei Kommunikation erlaubt.

19. Für $n = 3$ Spieler finde man eine Strategie, mit der das Team mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% gewinnt. – Man stelle einen Bezug zwischen der erfolgreichen Strategie und dem binären 3-fach Wiederholungscode her.

20. Für $n = 7$ Spieler finde man eine Strategie, mit der das Team mit einer Wahrscheinlichkeit von 87,5% gewinnt. (Hinweis: Man verwende das Korrekturschema eines (7,4) Hamming Codes für die Lösung.)

    Freiwillige Zusatzaufgabe, die keine Verbindung zu Codes hat: Wenn die n Spieler nicht simultan antworten müssen und die Antworten der Mitspieler hören können, für einen Gewinn des Teams aber jeder Spieler seine Zahl richtig erraten muss, dann gebe man eine Strategie an, die — mit der Ausnahme, dass alle dieselbe Zahl zugelost bekommen — immer zum Erfolg führt.

21. Nach dem Muster der binären Hamming-Codes konstruiere man für einen beliebigen endlichen Körper A mit q Elementen einen 1-perfekten Linearcode über A mit r Kontrollstellen, $r \geq 1$.

22. Man zeige, dass der Dualcode des binären Hamming-Codes mit r Kontrollstellen ein Code ist, bei dem je zwei verschiedene Codeworte Hammingdistanz 2^{r-1} haben. (Hinweis: Induktion nach r.) Dieser Code heißt auch Simplex-Code, warum?

23. Man zeige: Es existiert ein linearer Binärcode C der Länge n mit höchstens r Kontrollstellen und Minimaldistanz mindestens d, wenn folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$1 + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{d-2} < 2^r \quad \text{(Gilbert-Varshamov Schranke)}$$

Hinweis: Man konstruiere eine Kontrollmatrix für C.

24. Man überprüfe jeweils, ob der durch die Generatormatrix G_1 bzw. G_2 gegebene Binärcode zyklisch ist und bestimme in diesem Fall das Generatorpolynom:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

25. Man bestimme alle zyklischen Binärcodes der Länge 6.