2. Übung

1. (a) Lösen Sie die Rekursion $T(1) = 2$ und $T(n) = T(n-1)+2$ für $n \geq 2$ exakt, indem Sie wiederholt in die Rekursion einsetzen, bis Sie $T(n)$ erkennen. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mit der Substitutionsmethode.

   (b) Lösen Sie die Rekursion $T(1) = 2$ und $T(n) = 3T(n-1)+2$ für $n \geq 2$ exakt, indem Sie wiederholt in die Rekursion einsetzen, bis Sie $T(n)$ erkennen. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mit der Substitutionsmethode.

2. Lösen Sie die Rekursion $T(1) = 1$ und $T(n) = 3T(n/2)+n^2+n$ für $n = 2^k \geq 2$ exakt, indem Sie wiederholt in die Rekursion einsetzen, bis Sie $T(n)$ erkennen. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mit der Substitutionsmethode.

3. (a) Verwenden Sie die Substitutionsmethode, um nachzuweisen, dass $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$ asymptotisches Wachstum $O(\log n)$ hat.

   (b) Falls $T(n)$ die Rekursion $T(n) = 4T(n/3) + n$ erfüllt, so gilt laut Master Theorem $T(n) = \Theta(n^{\log_3 4})$. Zeigen Sie, dass ein Beweis mittels Substitutionsmethode mit dem Ansatz $T(n) \leq cn^{\log_3 4}$ nicht funktioniert. Zeigen Sie das behauptete asymptotische Wachstum mittels Substitutionsbeweis, indem Sie einen geeigneten Term niedrigerer Ordnung in Ihrem Ansatz subtrahieren.

   (c) Lösen Sie die Rekursion $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$ indem Sie die Variable n durch 2^m substituieren.

4. Verwenden Sie einen Rekursions–Baum, um eine asymptotische obere Schranke (d.h. ein O) der Rekursion

$$T(n) = T(n-a) + T(a) + n$$

   für $a \geq 1$ zu bestimmen. Verifizieren Sie Ihre Schranke mittels Substitutionsmethode.

5. Verwenden Sie einen Rekursions–Baum um eine asymptotische obere Schranke für die Rekursion

$$T(n) = 4T(n/2 + 2) + n$$

   zu bestimmten. Verifizieren Sie Ihre Schranke mittels Substitutionsmethode.

6. Verwenden Sie einen Rekursions–Baum um eine asymptotische obere und untere Schranke für die Rekursion

$$T(n) = 4T(n/5) + T(4n/5) + n$$

   zu bestimmen. Verifizieren Sie Ihre Schranke mittels Substitutionsmethode.

7. Finden Sie in den folgenden Beispielen asymptotische obere und untere Schranken für $T(n)$ mittels Master Theorem.

   (a) $T(n) = 2T(n/3) + n \lg n$.

   (b) $T(n) = T(9n/10) + n$.

   (c) $T(n) = 10T(n/3) + n^{1.2}$.

   (d) $T(n) = 4T(n/2) + n$.

   (e) $T(n) = 4T(n/2) + n^2$.

   (f) $T(n) = 4T(n/2) + n^3$.