6. Übung

1. B(reiten)s(uche) ist ein grundlegender, einfacher Algorithmus, welcher Informationen über einen gegebenen (gerichteten oder ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ liefert. Ausgehend von einem fixen Knoten $s \in V$ sucht Bs den Graphen systematisch ab und erreicht dabei sukzessive alle Knoten von G. Weiters erzeugt Bs einen Bs–Baum, welcher Information über kürzeste Wege von s zu $s' \in V$ liefert.
   Der Algorithmus verwendet eine Warteschlange (queue) Q, das ist eine Datenstruktur, in welcher Objekte nach Reihenfolge ihres Einfügens (enqueue) wieder entnommen werden (dequeue).
   Jedem Knoten $v \in V$ werden die Paramter $f(v) \in \{\text{weiß, grau, schwarz}\}$, die Farbe von v, $d(v) \in \mathbb{N}$, die Distanz von v zu s und $\pi(v) \in V$, der Vorgänger von v, zugeordnet.
   Hier der Algorithmus :
   $Bs(G, s)$:

   für jedes $v \in V \setminus \{s\}$
       $f(v) =$ weiß
       $d(v) = \infty$
       $\pi(v) = NIL$
   $f(s) =$grau
   $d(s) = 0$
   $\pi(s) = NIL$
   definiere queue $Q = \emptyset$
   enqueue(Q, s)
   while $Q \neq \emptyset$:
       $u =$ dequeue(Q)
       für alle $v \in V$ adjazent zu v in G
           if $f(v) =$ weiß:
               $f(v) =$ grau
               $d(v) = d(u) + 1$
               $\pi(v) = u$
               enqueue(Q, v)
       $f(u) =$ schwarz

   (a) Illustrieren Sie die Funktionsweise des Algorithmus anhand des ungerichteten Graphen $G(V, E)$ mit $V = \{A, B, \ldots, I\}$ und $E = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, E), (C, D), (C, E), (C, F)\}$ und dem Startknoten A.

   (b) Geben Sie eine O Abschätzung der Laufzeit von Bs.

   (c) Beweisen Sie, dass $d(v)$ tatsächlich die Länge des kürzesten Wegs von s nach v liefert.

2. Eine Anwendung des Bs–Algorithmus: Ein Graph $G = (V, E)$ ist zerlegbar, falls V in zwei Mengen V_1 und V_2 zerlegt werden kann, sodass jede Kante (u, v) in E entweder $u \in V_1$ und $v \in V_2$ oder $u \in V_2$ und $v \in V_1$ erfüllt.
   Modifizieren Sie den Algorithmus Bs (geringfügig) so, dass er in der selben Laufzeit wie der Bs Algorithmus feststellt, ob ein Graph zerlegbar ist, oder nicht.

3. (a) Der Durchmesser D eines Baumes ist der längste aller Wege in dem Baum, kurz $D = \max_{u,v}(dist(u, v))$. In welcher Zeit lässt sich unter Benutzung des Bs Algorithmus algorithmisch der Durchmesser eines Baumes feststellen? Geben Sie den Algorithmus dazu an.

   (b) Analog zu (a) wird der Durchmesser eines Graphen als die Länge des längsten kürzesten Pfades bezeichnet, d.h. abermals $D = \max_{u,v}(dist(u, v))$, wobei $dist(u, v)$ die Länge des kürzesten Weges zwischen u und v ist.
   Sei M eine Menge von n abgeschlossenen und beschränkten Intervallen $I_k = [a_k, b_k]$ in $\mathbb{R}$. Sei $I' = [a', b']$ ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $I' \subseteq \bigcup_{I \in M} I$, so heißt $U \subseteq M$ eine Überdeckung von I', falls $I' \subseteq \bigcup_{I \in U} I$. Eine Überdeckung heißt minimal, falls es eine Überdeckung mit kleinstmöglicher Anzahlen von Intervallen ist.

Die Intervalle aus M induzieren einen Graph G_M mit $V = M$, d.h. Knoten sind die Intervalle und zwei Intervalle I und J sind durch eine Kante verbunden falls $I \cap J \neq \emptyset$.
Im Folgenden sei M stets so, dass G_M zusammenhängend ist.

i. Sei $M = \{[0,3],[10,12],[2,8],[1,3],[8,11],[4,6],[7,9]\}$. Skizzieren Sie G_M und bestimmen Sie seinen Durchmesser.

ii. Sei $A = \max_{i=1,\dots,n} a_i$ und $B = \min_{i=1,\dots,n} a_i$. Weisen Sie nach:

   A. Falls $A \leq B$, so ist der Durchmesser von G_M 1.

   B. Falls $A > B$, so ist der Durchmesser von G_M um 1 größer als die Größe der minimalen Überdeckung von $[B, A]$ durch Intervalle von M.

iii. Geben Sie einen Algorithmus an, der den Durchmesser von G_M in $O(n \log n)$ Schritten berechnet.

4. Wir wollen ja reich werden: Gegeben sei die folgende Wechselkurstabelle (sorry für die mühsamen Zahlen):

Currency	UK Pound	Euro	Japanese Yen	Franc	Dollar	Gold
UK Pund	1.0000	0.6853	0.005290	0.4569	0.6368	208.100
Euro	1.4599	1.0000	0.007721	0.6677	0.9303	304.028
Japanes Yen	189.050	129.520	1.0000	85.4694	120.400	39346.7
Franc	2.1904	1.4978	0.011574	1.0000	1.3941	455.200
Dollar	1.5714	1.0752	0.008309	0.7182	1.0000	327.250
Gold	0.004816	0.003295	0.0000255	0.002201	0.003065	1.0000

(a) Was ist der beste Weg, um (mit mehreren Wechselschritten) 1 Unze Gold in Doller zu wechseln? Überlegen Sie sich, wie sie diese Maximierungsaufgabe (man möchte möglichst viele US Dollar) in eine shortest–path Aufgabe übersetzen kann (Hinweis: $\ln(x)$) und finden Sie die beste Lösung mit Bellman–Ford.

(b) Besonders leicht ließe sich (unendlich) viel Geld verdienen, wenn Sie in obigem (auf shortest–path modifizierten) Graphen negative cycles entdecken würden – diese werden ebenfalls von Bellman Ford entdeckt. Finden Sie (ausgehend von US Dollar) einen negativen cycle.

5. Betrachtet wird wieder (vgl. 5. Übung) der vollständige Graph mit den Knoten $\{A, B, C, D, E, F\}$ und folgenden Kantengewichten:

	A	B	C	D	E	F
A	0	6	9	11	5	9
B	6	0	3	6	5	2
C	9	3	0	0	4	4
D	11	6	0	0	6	6
E	5	5	4	6	0	8
F	9	2	4	6	8	0

Bestimmen Sie die kürzesten Wege von F zu allen anderen Knoten mit Dijkstras Algorithmus.