8. Übung

1. Der Ford–Fulkerson Algorithmus zur Findung eines maximalen Flusses konvergiert nicht notwendigerweise. Unter
   http://www.cs.huji.ac.il/ nati/PAPERS/ALGORITHMS/zwick.pdf
   finden sich diesbezügliche Gegenbeispiele. Erarbeiten Sie sich die beiden planaren Beispiele (Section 2).

2. Man kann den Ford–Fulkerson Algorithmus leicht modifizieren um Terminisierung zu garantieren–man fixiert einfach die Reihenfolge, in welcher die augmentierenden Wege gewählt werden. Es wird stets der kürzeste augmentierende Weg gewählt.

   Der derart modifizierte Ford–Fulkerson Algorithmus wird Edmonds–Karp Algorithmus genannt, zeigen Sie, dass er in $O(VE^2)$ Schritten läuft.

   Anleitung: Sie finden den vollständigen Beweis im Buch Introduction to Algorithms von Cormen at al., arbeiten Sie die entscheidenden Ideen heraus.

3. (a) Wiederholen Sie den Simplex Algorithmus am Beispiel:
   Maximiere $5x_1 + 2x_2 + x_3$ unter den Nebenbedingungen
   $x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 6$
   $x_2 + x_3 \leq 4$
   $3x_1 + x_2 \leq 7$
   alle $x_i \geq 0$.
   Formulieren und lösen Sie auch das duale Problem und weisen Sie damit nach, dass die gefundene Lösung tatsächlich optimal ist.

   (b) Wiederholen Sie, wie allgemeine lineare Programme in Standardform gebracht werden können– Bringen Sie das folgende linare Progamm auf Standardform:
   Minimiere $2x_1 + 7x_2 + x_3$ unter den Nebenbedingungen
   $x_1 - x_3 = 7$
   $3x_1 + x_2 \geq 24$
   $x_2 \geq 0$
   $x_3 \leq 0$.

4. Gegeben sei das folgende lineare Programm:
   Maximiere $3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4$ unter den Nebenbedingungen
   $x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 0$
   $2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \leq 0$
   $x_3 \leq 1$
   alle $x_i \geq 0$.

   (a) In diesem Bsp. tritt ein *cycling* auf – bringen Sie das Programm auf slack Form mit $N = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{5, 6, 7\}$ und machen Sie folgende Pivotumformungen (angegeben ist für jeden Schritt das Paar (e, l), wobei $l \in B$ der Index der leaving– und $e \in N$ der Index der entering variable ist):
   $(1, 5) \to (2, 6) \to (3, 1) \to (4, 2) \to (5, 3) \to (6, 4)$.

   (b) Lösen Sie das Problem, indem Sie in jedem Schritt (in Zeile 4 und 9 des SIMPLEX Algorithmus) das Element mit minimalem Index pivoten.

5. Durch Umschreiben kann man auch nichtlineare Zielfunktionen mittels linearer Programmierung lösen, hierzu ein Beispiel:
   Gesucht sind y_i, $i = 1, \ldots, m$, sodass
   $$\sum_{j=1}^{p} \left| \sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - b_j \right|$$
   minimal wird unter den Nebenbedingungen
   $\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq c_j$ für $j = 1, \ldots, l$,

$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} = c_j$ für $j = l+1, \ldots, n,$
$y_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, k$
y_i unbeschränkt für $i = k+1, \ldots, m$

(a) Schreiben Sie das Problem unter Einführung neuer Variablen in ein lineares Programm in Standardform um.

(b) Finden Sie konkret y_1 und y_2 so, dass

$$|y_1 + y_2 - 1| + |2y_1 - y_2 + 1| + |y_1 - y_2 - 2|$$

minimal wird unter den Nebenbedingungen $y_1 \geq 0$ und $y_2 \geq 0$.