9. Übung

1. Wiederholen Sie die Anwendung der Fast Fourier Transformation zur Berechnung des Produkts zweiter Polynome am Beispiel $p(x) = 4 - 4x$ und $q(x) = 6 + 2x$.

2. Ad Geometrsiche Algorithmen: Beschreiben Sie eine Vorgehensweise, wie man in $O(n^2 \log n)$ Schritten überprüfen kann, ob es in einer Menge von n Punkten in der Ebene drei gibt, welche auf einer Geraden liegen.

3. In der Vorlesung wurde Grahams–Scan–Algorithmus zur Bestimmung der konvexen Hülle $C(P)$, $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$, von n Punkten $p_1, \ldots, p_n$ in der Ebene vorgestellt.

   Bestimmen Sie die konvexe Hülle von

   $$P = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

   mit Grahams–Scan–Algorithmus.

4. Hier ein alternativer Algorithmus zur Bestimmung der konvexen Hülle, beruhend auf der Idee, dass die konxexe Hülle von n Punkten gerade jenes Polygon ist, welches man erhält, wenn man die Punkte aus P mit einer Schnur umwickelt. Genauer:

   Man beginnt bei einem Punkt $p \in P$ welcher sicher Teil der konvexen Hülle ist, z.B. jener mit minimaler y–Koordinate. Ausgehend von p bestimmt man jenen Punkt $p' \in C(P)$, sodass p' die nächste Ecke von $C(P)$ ist, wenn man die Ecken von $C(P)$ gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. p' ist dadurch bestimmt, dass alle Punkte aus P links von der Gerade pp' liegen. Existieren mehrere Punkte in P mit dieser Eigenschaft, sei p' jener, welcher am weitesten von p entfernt ist. Hat man p', so bestimmt man analog p'' – ausgehend von p' sucht man den nächsten Eckpunkt von $C(P)$, $p'' \in P$. Diese Prozedur setzt man fort, bis man wieder zu p zurück kommt.

   (a) Geben Sie den Pseudocode für diesen Algorithmus *ConvexA* an, welcher die konvexe Hülle in $O(ne)$ Schritten bestimmt, wobei e die Anzahl der Ecken von $C(P)$ ist.

   (b) Bestimmen Sie die konvexe Hülle der Menge P aus Beispiel 3 mit *ConvexA*.

5. Und noch ein Algorithmus zur Bestimmung der konvexen Hülle, *ConvexB*, nun ein Divide and Conquer–Algorithmus – die entscheidenden Schritte:

   - Sortiere P nach den x–Korrdinaten.
   - Wenn $n \leq 3$ löse direkt, sonst verwende Divide and conquer folgendermaßen:
   - Zerlege P in zwei Mengen, P_1 und P_2 mit disjunkten konvexen Hüllen.
   - Bestimme die konvexen Hüllen $C(P_1)$ und $C(P_2)$ durch nochmaligen Aufruf des Algorithmus.
   - Bestimme $C(P)$ aus $C(P_1)$ und $C(P_2)$.

   (a) Überlegen Sie sich, wie die beiden konvexen Hüllen $C(P_1)$ und $C(P_2)$ zu $C(P)$ algorithmisch kombiniert werden können.

   (b) Schreiben Sie einen Pseudocode von *ConvexB*, welcher die konvexe Hülle in $O(n \log n)$ Schritten bestimmt.

   (c) Bestimmen Sie die konvexe Hülle der Menge P aus Beispiel 3 mit *ConvexB*.