Übungsblatt 12 für "Diskrete und geometrische Algorithmen"

1.) Gegeben sei das lineare Programm:

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere } 5x_1 - 3x_2 \text{ unter den Nebenbedingungen}\\ x_1 - x_2 &\le 1,\\ 2x_1 + x_2 &\le 2,\\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Geben Sie das zugehörige duale lineare Programm an, lösen Sie das primale lineare Programm mit dem Simplexalgorithmus und erläutern Sie, wie man aus diesem auch eine optimale Lösung für das duale lineare Programm gewinnen kann.

2.) Offensichtlich ist das folgende lineare Programm unlösbar:

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere } 3x_1 - 2x_2 \text{ unter den Nebenbedingungen}\\ x_1 + x_2 &\le 2,\\ -2x_1 - 2x_2 &\le -10,\\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Erläutern Sie, wie dies in der Hilfsprozedur Initialize-Simplex festgestellt wird.

3.) Zeigen Sie an Hand des folgenden Beispiels, wie durch Lösen eines linearen Hilfsprogramms eine zulässige Ecke für den Start des Simplexalgorithmus gefunden wird. Das lineare Programm selbst brauchen Sie dann aber nicht mehr lösen.

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere } x_1 + 3x_2 \text{ unter den Nebenbedingungen}\\ x_1 - x_2 &\le 8,\\ -x_1 - x_2 &\le -3,\\ -x_1 + 4x_2 &\le 2,\\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

4.) Durch Umschreiben ist es manchmal möglich, auch nichtlineare Zielfunktionen mittels linearer Programmierung zu behandeln. Betrachten Sie exemplarisch das folgende Beispiel (welches natürlich leicht verallgemeinert werden kann):

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere } |x_1 - 2x_2 + 1| + 2|x_1 - x_2| \text{ unter den Nebenbedingungen}\\ x_1 + 2x_2 &\le 1,\\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Man überlege sich, daß eine optimale Lösung dieses Problems mit Hilfe des folgenden linearen Programms gefunden werden kann:

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere } u + 2v \ \text{ unter den Nebenbedingungen} \\ -u \le x_1 - 2x_2 + 1 &\le u, \\ -v \le x_1 - x_2 &\le v, \\ x_1 + 2x_2 &\le 1, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Formen Sie dieses lineare Programm noch in Standardform um (Sie brauchen es aber nicht mehr "mit der Hand" zu lösen!).

5.) Beschreiben Sie eine Vorgehensweise, wie man in $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ Schritten überprüfen kann, ob es in einer Menge von n Punkten in der Ebene drei gibt, welche auf einer Geraden liegen.

6.) Wiederholen Sie den in der Vorlesung kennengelernten Graham-Scan-Algorithmus zur Bestimmung der konvexen Hülle $\mathrm{CH}(Q)$, $Q = \{p_1, \ldots, p_n\}$, von n Punkten $p_1, \ldots, p_n$ in der Ebene an Hand der Punktmenge

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Anmerkung: Sollte in der Vorlesung der Graham-Scan-Algorithmus nicht mehr rechtzeitig vor den Übungen behandelt werden können, dann ist Beispiel 6.) natürlich hinfällig!