Übungsblatt 3 für "Diskrete und geometrische Algorithmen"

17.) (a) Lösen Sie die Rekursion $T(1) = 2$ und $T(n) = T(n-1) + 2$ für $n \geq 2$ exakt, indem Sie wiederholt in die Rekursion einsetzen, bis Sie $T(n)$ erkennen. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mit der Substitutionsmethode.

(b) Lösen Sie die Rekursion $T(1) = 2$ und $T(n) = 3T(n-1) + 2$ für $n \geq 2$ exakt, indem Sie wiederholt in die Rekursion einsetzen, bis Sie $T(n)$ erkennen. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mit der Substitutionsmethode.

18.) Lösen Sie die Rekursion $T(1) = 1$ und $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2 + n$ für $n = 2^k \geq 2$ exakt, indem Sie wiederholt in die Rekursion einsetzen, bis Sie $T(n)$ erkennen. Verifizieren Sie Ihr Ergebnis mit der Substitutionsmethode.

19.) (a) Verwenden Sie die Substitutionsmethode um nachzuweisen, daß $T(n) = T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1$ asymptotisches Wachstum $O(\log n)$ hat.

(b) Falls $T(n)$ die Rekursion $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n$ erfüllt, so gilt laut Master-Theorem $T(n) = \Theta(n^{\log_3 4})$. Zeigen Sie, daß ein Beweis mittels Substitutionsmethode mit dem Ansatz $T(n) \leq c\, n^{\log_3 4}$ nicht funktioniert. Zeigen Sie das behauptete asymptotische Wachstum mittels Substitutionsbeweis, indem Sie einen geeigneten Term niedrigerer Ordnung in Ihrem Ansatz subtrahieren.

20.) Verwenden Sie einen Rekursionsbaum, um eine asymptotische obere Schranke (d.h. ein O) der Rekursion

$$T(n) = T(n-a) + T(a) + n, \quad \text{für } n > a, \qquad T(n) = 0, \quad \text{für } n < a,$$

für gegebenes $a \geq 1$ zu bestimmen. Verifizieren Sie Ihre Schranke mittels Substitutionsmethode.

21.) Verwenden Sie einen Rekursionsbaum um eine asymptotische obere Schranke für die folgende Rekursion zu bestimmen:

$$T(n) = \begin{cases} 4T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2) + n, & \text{für } n > 5, \\ \Theta(1), & \text{für } n \leq 5. \end{cases}$$

Verifizieren Sie Ihre Schranke mittels Substitutionsmethode.

Hinweis: Betrachten Sie im Rekursionsbaum z.B. Werte $n = 2^{k+1} + 4$, mit $k \in \mathbb{N}$. Für das Verifizieren der Schranke mittels Substitutionsmethode ist es hilfreich, sich an den "Trick" aus der Vorlesung zu erinnern und einen geeigneten Term niedrigerer Ordnung im Ansatz zu subtrahieren!

22.) Verwenden Sie einen Rekursionsbaum um eine asymptotische obere und eine asymptotisch untere Schranke (brauchen nicht die selbe Größenordnung haben!) für die Rekursion

$$T(n) = 4T(\frac{n}{5}) + T(\frac{4n}{5}) + n$$

zu bestimmen. Verifizieren Sie Ihre Schranken mittels Substitutionsmethode.

23.) Finden Sie in den folgenden Beispielen asymptotische obere und untere Schranken für $T(n)$ mittels Master-Theorem.

(a) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n \log n$.

(b) $T(n) = T(\frac{9n}{10}) + n$.

(c) $T(n) = 10T(\frac{n}{3}) + n^{1.2}$.

(d) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$.

(e) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$.

(f) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^3$.

24.) Gegeben ist die "Divide and Conquer"-Rekursion

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n),$$

mit einer nichtnegativen Funktion $f(n)$ mit asymptotischem Wachstum $\Theta(n^{\log_b a} \log n)$. Zeigen Sie für den Fall $n = b^k$, $k \in \mathbb{N}$, daß $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^2(n))$.