9.) Die Fibonacci-Zahlen seien durch die Rekursion $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, für $n \geq 2$, mit den Anfangswerten $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ definiert.

(a) Betrachten Sie den folgenden Algorithmus zur Berechnung der Zahlen F_n:

```
FIB(n)
IF n = 0 THEN
   RETURN 0
ELSIF n = 1 THEN
   RETURN 1
ELSE
   RETURN FIB(n − 1) + FIB(n − 2)
END IF
```

Wie oft muss wird F_2 berechnet werden, wenn man F_n mit Hilfe dieses Algorithmus berechnet.

(b) Stellen Sie eine Rekursion für die Anzahl der Additionen a_n auf, die der Algorithmus bei der Berechnung von F_n durchführt, und lösen Sie diese.

10.) Beantworten Sie die folgenden Fragen durch Aufstellen und Lösen einer geeigneten Rekursion:

(a) Wie viele Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten?

(b) Wie viele solche Teilmengen gibt es, wenn man die Zahlen zyklisch anordnet. d.h. wenn 1 als Nachfolger von n gilt?

11.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Rekursion $a_n = \frac{n+2}{3n} a_{n-1} + n^2 + 3n + 2$.

12.) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$2a_n - 7a_{n-1} + 6a_{n-2} = (n^2 + 3n - 4)3^n, \quad \text{falls } n \geq 2, \quad a_0 = 10, \quad a_1 = -7.$$

13.) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $a_{n+1} = 3a_n^2/a_{n-1}$, falls $n \geq 1$, und $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

14.) Sei M eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, dass es dann genauso viele Teilmengen $A \subseteq M$ mit ungerader Anzahl von Elementen wie solche mit gerader Anzahl von Elementen gibt.

15.) Sei n eine positive ganze Zahl und $(a_1, \ldots, a_n)$ eine Permutation von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Weiters sei

$$A_k = \{a_i \mid a_i < a_k, i > k\} \text{ und } B_k = \{a_i \mid a_i > a_k, i < k\}$$

für $1 \leq k \leq n$. Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |A_k| = \sum_{k=1}^{n} |B_k|$.

16.) Sei $\mathcal{M}$ eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge X. Für alle $x \in X$ bezeichne $r(x)$ die Anzahl aller Mengen $A \in \mathcal{M}$ mit $x \in A$. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{x \in X} r(x) = \sum_{A \in \mathcal{M}} |A|.$$

Hinweis: Methode des doppelten Abzählens.