Übungsblatt 3

17.) Beweisen Sie, dass es unter je neun Punkten in einem Würfel der Kantenlänge 2 stets zwei Punkte gibt, deren Abstand höchstens $\sqrt{3}$ ist.

18.) Sei $A \subseteq \{1, 2, \ldots 2n\}$ und $|A| > n$. Zeigen Sie: Es gibt $x, y \in A$ derart, dass x ein Teiler von y ist.

19.) Seien $m, n \in \mathbb{N}^+$ und $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Zahlen. Beweisen Sie mit Hilfe eines Schubfachschlusses, dass diese Folge eine monoton wachsende Teilfolge der Länge $m + 1$ oder eine monoton fallende Teilfolge der Länge $n + 1$ besitzt.

20.) (a) Beweisen Sie die in der Vorlesung gebrachte Formel zum Inklusions-Exklusionsprinzip mit vollständiger Induktion.

(b) In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 9 Englisch, 9 Russisch, 5 Deutsch und Englisch, 7 Deutsch und Russisch, 4 Englisch und Russisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

21.) Verwenden Sie einen Rekursionsbaum, um eine asymptotische obere Schranke (d.h. ein O) der Rekursion $T(n) = T(n - a) + T(a) + n$, für $n > a$, und $T(n) = 0$, für $n < a$, für gegebenes $a \geq 1$ zu bestimmen. Verifizieren Sie Ihre Schranke mittels Substitutionsmethode.

22.) Verwenden Sie einen Rekursionsbaum um eine asymptotische obere Schranke für die folgende Rekursion zu bestimmen:

$$T(n) = \begin{cases} 4T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2) + n, & \text{für } n > 5, \\ \Theta(1), & \text{für } n \leq 5. \end{cases}$$

Verifizieren Sie Ihre Schranke mittels Substitutionsmethode.

Hinweis: Betrachten Sie im Rekursionsbaum z.B. Werte $n = 2^{k+1} + 4$, mit $k \in \mathbb{N}$.

23.) Finden Sie in den folgenden Beispielen asymptotische obere und untere Schranken für $T(n)$ mittels Master-Theorem.

(a) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n \log n$.

(b) $T(n) = T(\frac{9n}{10}) + n$.

(c) $T(n) = 10T(\frac{n}{3}) + n^{1.2}$.

(d) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$.

(e) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$.

(f) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^3$.

24.) Gegeben ist die "Divide and Conquer"-Rekursion

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n),$$

mit einer nichtnegativen Funktion $f(n)$ mit asymptotischem Wachstum $\Theta(n^{\log_b a} \log n)$. Zeigen Sie für den Fall $n = b^k$, $k \in \mathbb{N}$, daß $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log^2(n))$.