Übungsblatt 8

Zu 57–59: Sei $\mathcal{T}$ die Menge aller Bäume mit der Knotenmenge $V = \{1, 2, \dots, n\}$ und $\mathcal{W}$ die Menge aller Wörter der Länge $n-2$ über dem Alphabet V. Die Abbildung $f : \mathcal{T} \to \mathcal{W}$ sei rekursiv wie folgt definiert: Für $n = 2$ ist $\mathcal{T}$ einelementig und $T \in \mathcal{T}$ bezeichne dieses Element, also den Baum mit zwei Knoten. Wir setzen $f(T) = \varepsilon$, wobei ε das leere Wort bezeichnet. Für $n \geq 3$ und $T \in \mathcal{T}$ sei $f(T) = (w, f(T'))$, wobei T' den Baum mit $n-1$ Knoten bezeichnet, der wie folgt konstruiert ist: Sei v das kleinste Blatt von T, d.h. $v = v(T) := \min\{u \in V \mid d(u) = 1\}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Kante (v, w), die mit v inzidiert. Der Baum T' sei nun jener Baum, der aus T durch Entfernen von v und (v, w) entsteht.

57.) Berechnen Sie $f(T)$ für alle Bäume mit höchstens 3 Knoten und für einen Baum Ihrer Wahl mit 7 Knoten.

58.) Bestimmen Sie die Anzahl der Spannbäume des vollständigen Graphen K_n, indem Sie zeigen, dass f eine Bijektion ist. Berechnen Sie weiters das Urbild von $(3, 3, 10, 10, 9, 8, 8, 9, 10)$.

59.) Zeigen Sie, dass die Blätter von T genau jene Knoten sind, die im Wort $f(T)$ nicht als Buchstaben vorkommen.

60.) Beweisen Sie, dass je zwei Basen eines (endlichen) Matroids gleichmächtig sind.

61.) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und k eine beliebige nichtnegative ganze Zahl. Ferner sei $M_k(G) = (E, S)$. Die Menge S sei definiert als die Menge aller Teilmengen von E, die sich in der Form $M \cup F$ darstellen lassen, wobei M eine höchstens k-elementige Menge bezeichnet und F eine Menge, für die (V, F) ein Wald ist. Beweisen Sie, dass $M_k(G)$ ein Matroid ist.

62.) Sie $M = (E, S)$ ein Matroid und $\mathcal{D}$ die Menge aller minimalen abhängigen Menge von M, d.h.: Falls $A \in \mathcal{D}$, dann ist jede echte Teilmenge von A unabhängig. Zeigen Sie: Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{D}$ mit $A_1 \neq A_2$. Dann gibt es für alle $x \in A_1 \cup A_2$ eine Menge $B \in \mathcal{D}$, die $B \subseteq (A_1 \cup A_2) \setminus \{x\}$ erfüllt.

63.) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$ und $v_0 \in V$. Der Graph werde mit $\textsc{Init}(G, v_0)$ initialisiert, und dann werde eine Folge von Relaxationsschritten ausgeführt, sodass danach $\pi(v_0) \neq \text{NIL}$ gelte. Beweisen Sie, dass G einen Zyklus mit negativem Gewicht besitzt.

64.) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$ und $v_0 \in V$. Ferner gebe es in G keine Zyklen mit negativem Gewicht, die von v_0 aus erreichbar sind. Dann bildet nach der Initialisierung mittels $\textsc{Init}(G, v_0)$ der Vorgängerteilgraph $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$, wobei

$$V_\pi = \{v \in V \mid \pi(v) \neq \text{NIL}\} \cup \{v_0\} \text{ und } E_\pi = \{(\pi(v), v) \mid v \in V_\pi \setminus \{v_0\}\},$$

einen gerichteten Baum mit Wurzel v_0. Jede Folge von Relaxationsschritten erhält diese Eigenschaft.

Anleitung: Beweisen Sie zunächtst, dass jeder Zyklus in G_π ein negatives Gewicht haben muss und dann, dass es für alle $v \in V_\pi$ genau einen Pfad $v_0 \rightsquigarrow v$ gibt.