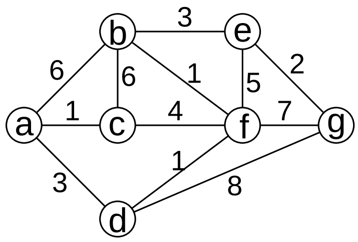
Übungsblatt 9

65.) Man erkläre die Funktionsweise von Dijkstra's Algorithmus an Hand der Konstruktion eines Entfernungsbaums (also des Vorgängerteilgraphs) vom Startknoten a zu allen übrigen Knoten im folgenden kantenbewerteten Graphen G:

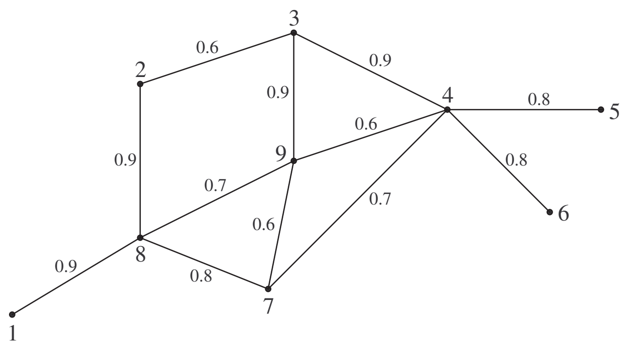


66.) Modifizieren Sie den Bellman-Ford-Algorithmus so, dass er das Atrribut $d(v)$ für jeden Knoten v, zu dem einen bei s startenden Pfad (= gerichtete Kantenfolge) gibt, der einen Zyklus mit negativem Gewicht enthält, auf $-\infty$ setzt.

67.) Gegeben sei ein gerichteter oder ungerichteter Graph $G = (V, E)$, in dem jeder Kante $(u, v) \in E$ ein reeller Wert $r(u, v)$ mit $0 \le r(u, v) \le 1$ zugeordnet ist, der die Zuverlässigkeit einer Datenübertragung vom Knoten u zum Knoten v darstellt. Wir interpretieren $r(u, v)$ als die Wahrscheinlichkeit, dass der Kanal von u nach v nicht versagt, und setzen voraus, dass diese Wahrscheinlichkeiten paarweise unabhängig sind.

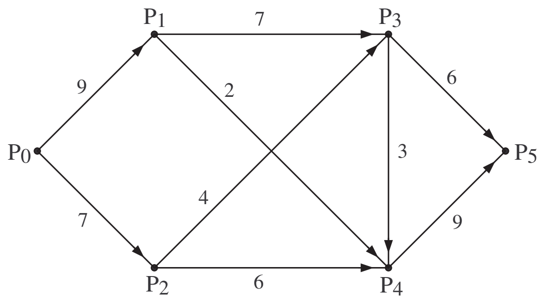
(a) Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der den zuverlässigsten Kanal zwischen zwei gegebenen Knoten bestimmt.

(b) Wenden Sie diesen Algorithmus auf folgenden Graphen an um einen möglichst zuverlässigen Kommunikationskanal zwischen den Knoten 1 und 5 herzustellen, wobei die Wahrscheinlichkeiten $r(u, v)$ bei den entsprechenden Kanten angegeben sind.



68.) Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter gerichteter Graph mit Startknoten s und sei G durch die Prozedur Init-Single-Source(G, s)) (siehe VO) initialisiert worden. Beweisen Sie, dass G einen Zyklus mit negativem Gewicht enthält, wenn eine Folge von Relaxationsschritten das Attribut $\pi(s)$ auf einen von NIL verschiedenen Wert setzt.

69.) Man erkläre die Ford-Fulkerson-Methode zum Lösen des "Maximalen Fluss-Problems" an Hand des Auffinden eines maximalen Flusses vom Knoten P_0 zum Knoten P_5 im nachfolgend angegebenen Flussnetzwerk. Weiters gebe man auch einen minimalen Schnitt in diesem Netzwerk an.



70.) Beweisen Sie den Heiratssatz, indem Sie ihn in ein Problem zur Bestimmung eines maximalen Flusses übersetzen.

Zum Heiratssatz: Gegeben ist eine Menge D von Damen, eine Menge H von Herren mit $|H| \geq |D|$ und eine Freundschaftsrelation $R \subseteq D \times H$. Eine zulässige Heirat ist definiert als eine Mehrfachhochzeit, sodass jede Dame genau einen Herren heiratet, mit welchem sie auch befreundet ist.

Der Heiratssatz lautet nun: Wir setzen voraus, dass die Damen einer jeden Teilmenge $D' \subseteq D$ zusammen mindestens $|D'|$ Freunde besitzen. Dann existiert eine zulässige Heirat.

71.) Gegeben sind zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aus $\mathbb{C}^n$. Die herkömmliche Berechnung der Faltung $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ benötigt $\Theta(n^2)$ Operationen. Man gebe ein besseres Verfahren an, mit dem der Aufwand nur mehr $\Theta(n^{\log_2 3})$ beträgt. Hinweis: Divide and Conquer.

72.) Erklären Sie die Funktionsweise des FFT-Algorithmus an Hand der Berechnung des Produkts der Polynome $A(x) = 4 - 4x$ und $B(x) = 6 + 2x$.