Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Übungsbeispiele

1) Man gebe eine Folge reeller Zahlen an, die als Häufungspunkte genau alle natürlichen Zahlen hat.

2) Man gebe eine Folge reeller Zahlen an, die als Häufungspunkte genau alle ganzen Zahlen hat.

3) Gibt es eine Folge reeller Zahlen, die als Häufungspunkte genau alle rationalen Zahlen hat?

4) Man finde alle Häufungspunkte der Folge $a_n = (-1)^n + \cos\frac{n\pi}{2}$ $(n \geq 0)$.

5) Man finde alle Häufungspunkte der Folge $a_n = \sin\frac{n\pi}{2} + (-1)^{n(n+1)/2}$ $(n \geq 0)$.

6) Man finde alle Häufungspunkte der Folge

$$a_n = \frac{\sqrt{n} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{n} + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}, \qquad (n \geq 1).$$

7) Man zeige, dass die Folge $a_n = \frac{\sin n}{n}$ $(n \geq 1)$ nur 0 als Häufungspunkt hat.

8) Man zeige, dass die Folge $a_n = \frac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n}}$ $(n \geq 1)$ nur 0 als Häufungspunkt hat.

9–12) Man zeige, dass die Folge a_n konvergiert, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angebe.

9) $a_n = \dfrac{\sin n + \cos n}{\sqrt{n}}$ **10)** $a_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt[4]{n}}$

11) $a_n = \frac{\ln n}{n}$ Anleitung: Zeigen Sie, daß aus $\ln x < \frac{x}{2}$ die Ungleichung $\ln(n) < \sqrt{n}$ folgt. Die erste Ungleichung darf ohne Beweis verwendet werden.

12) $a_n = \frac{n}{4^n}$ Anleitung: Zeigen Sie zunächst $n < 2^n$.

13) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge. Man zeige, dass es zwei beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

14) Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge. Man zeige, dass es zwei Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

15) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$. Man zeige, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + 2b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergiert mit $\lim c_n = c = a + 2b$, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angebe.

16) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$. Man zeige, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergiert mit $\lim c_n = c = 3a - b$, indem man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angebe.

17) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$ mit $b \neq 0$. Man zeige, dass dann gilt $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$. — Wieso spielt hierbei die zusätzliche Bedingung „$b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$“, die eigentlich für die Existenz der Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ notwendig ist, keine große Rolle?

18) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

19) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Zeigen Sie, dass aus $a_n < b_n$ immer $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ folgt. Läßt sich hier $\leq$ durch $<$ ersetzen?

20) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ sei $a_n = 1 + \frac{1}{n^2} + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\left(3 - \frac{5}{n}\right)$.

1. Gelten für die Umgebung $U = U_1(3) = (2, 4)$ von 3 die folgenden beiden Aussagen?

   (a) $a_n \in U$ für unendlich viele n.

   (b) Es gibt ein $N = N(\varepsilon) = N(1)$ mit $a_n \in U$ für alle $n \geq N$.

2. Geben Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ an.

3. Geben Sie eine Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < \ldots$ an, so dass $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge von $(a_n)_{n \geq 1}$ ist.

4. Warum konvergieren alle monotonen Teilfolgen von $(a_n)_{n \geq 1}$?

21–27) Man untersuche die Folge a_n (mit Hilfe vollständiger Induktion) auf Monotonie und Beschränktheit und bestimme gegebenenfalls mit Hilfe der bekannten Rechenregeln für Grenzwerte den Grenzwert $\lim a_n$.

21) $a_0 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}$ für alle $n \geq 0$.

22) $a_0 = 4$, $a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 9}$ für alle $n \geq 0$.

23) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$ für alle $n \geq 0$.

24) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{4 \cdot \sqrt{a_n} - 3}$ für alle $n \geq 0$. Hinweis: $x^4 - 4x + 3 = (x-1)^2(x^2 + 2x + 3)$.

25) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{a_n} - 3}$ für alle $n \geq 0$. Hinweis: $x^4 - 2x + 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 1)$.

26) $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n - 1}$ für alle $n \geq 0$.

27) $a_0 = 1/2$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n - 1}$ für alle $n \geq 0$.

28) Man untersuche nachstehende Folgen in Hinblick auf Monotonie, Beschränktheit und mögliche Grenzwerte. Ferner veranschauliche man die Folgen auf der reellen Zahlengeraden:

(a) $(a_n) = 0, 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots, 2n+1, \frac{1}{2n+2}, \ldots$

(b) (b_n) mit $b_n = \frac{n+4}{n-1}$ für $n \geq 2$

(c) (c_n) mit $c_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$ für $n \geq 1$

29) Sei $0 < a_0 < c$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $a_{n+1} = \sqrt{a_n c}$.

(a) Zeigen Sie, dass aus $0 < a < c$ stets $a < \sqrt{ac} < c$ folgt.

(b) Folgern Sie aus (a) mittels Induktion nach n, dass $0 < a_n < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen die a_n irgendein Monotonieverhalten? Wenn ja, welches?

(d) Untersuchen Sie die a_n hinsichtlich Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

30) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge (a_n) mit $a_0 = 3$ und $a_{n+1} = (a_n + 6/a_n)/2$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Man berechne die Folgenglieder a_n für $n = 0, \ldots, 10$, untersuche die Folge in Bezug auf Monotonie, Beschränktheit sowie Konvergenz und berechne – wenn möglich – den Grenzwert.

31) Seien P_1 und P_2 beliebige Punkte der Zahlengeraden. Man halbiere fortgesetzt die Strecke $\overline{P_1P_2}$ in P_3, die Strecke $\overline{P_2P_3}$ in P_4, $\overline{P_3P_4}$ in P_5, usw. und bestimme die Lage von P_n für $n \to \infty$.

32–47) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenfalls den Grenzwert.

32) $a_n = \dfrac{2n^3 + 2n - 3}{4n^3 + n^2 + 5}$

33) $a_n = \dfrac{4n^2 + 5n - 3}{2n^3 + 3n^2 - n + 7}$

34) $a_n = \dfrac{3n^2 - 5n + 7}{3n^3 - 5n + 7}$

35) $a_n = \dfrac{2n^3 - 5n^2 + 7}{2n^3 - 5n + 7}$

36) $a_n = \dfrac{2n^2 - 5n^{\frac{9}{4}} + 7}{7n^3 + 2n^{-\frac{3}{2}} + 1}$

37) $a_n = \dfrac{3n^2 - 4n^{\frac{11}{3}} + n^{-1}}{2n^4 + 2n^{-\frac{3}{2}} + 1}$

38) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

39) $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$

40) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

41) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}$

42) $a_n = \dfrac{\frac{\sin n}{(n-2)^2} + \frac{n^2+2}{n^2-n}}{\frac{3n^2+2}{n^2+n}}$

43) $a_n = \dfrac{\frac{n^2-4}{4n^2-7n} - \frac{\cos n}{2n-5}}{\frac{3n^2+2}{(n-3)^2}}$

44) $a_n = n\,q^n \quad (-1 < q < 0)$

45) $a_n = \dfrac{q^n}{n} \quad (q > 1)$

46) $a_n = \sqrt[n^2]{n^5 + 1}$

47) $a_n = \sqrt[n^2]{n^3 + n^2}$

(Hinweis zu Bsp. 46) und Bsp. 47): Man verwende den als bekannt vorausgesetzten Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.)

48–51) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert, indem man zwei geeignete Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n \leq a_n \leq c_n$ finde.

48)

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$$

49)

$$a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$$

50)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

51)

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \cdots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$$

52) Zeigen Sie: Sind $a_1, \ldots, a_m \geq 0$ fest gewählte reelle Zahlen und ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $b_n = \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_m^n}$ definiert, so gilt $\lim b_n = \max\{a_1, \ldots, a_m\}$.

53) Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv gegeben durch $a_0 = 0$ und

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1).$$

Man zeige (mit Hilfe vollständiger Induktion)

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

und bestimme den Grenzwert.

54) Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv gegeben durch $a_0 = 0$ und

$$a_{n+1} = a_n + \frac{n}{(n+1)!} \quad (n \geq 0).$$

Man zeige (mit Hilfe vollständiger Induktion)

$$a_n = 1 - \frac{1}{n!}$$

und bestimme den Grenzwert.

55) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}.$$

56–57) Man bestimme alle Häufungspunkte, sowie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ der Folge a_n:

56)

$$a_n = (-1)^n n^{\left((-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}+1\right)} + \cos\frac{n\pi}{2}$$

57)

$$a_n = \frac{n^2\cos\frac{n\pi}{2} + 1}{n+1} + \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

58–59) Man zeige, dass die Folge a_n uneigentlich konvergiert, indem man zu jedem $A > 0$ ein $N(A)$ angebe, sodass für $n > N(A)$ immer $a_n > A$ gilt.

58)

$$a_n = \frac{n^3+1}{n-1}$$

59)

$$a_n = \frac{2n^4+n}{n^3+n}$$

60) Man gebe zwei reelle Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n^2} = +\infty$$

erfüllen.

61) Man gebe zwei reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ an, die

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{b_n} = +\infty \qquad \text{erfüllen.}$$

62–63) Man untersuche, welche o-, O- und $\sim$-Beziehungen zwischen den Folgen a_n, b_n und c_n bestehen.

62) $a_n = 2n$, $b_n = \frac{n^2}{2}$, $c_n = \frac{3n^4}{6n^2+1}$.

63) $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = \frac{8n^2}{4n^3+1}$.

64–65) Zeigen Sie die folgenden asymptotischen Beziehungen für die Anzahlen der Kombinationen mit bzw. ohne Wiederholungen für festes k und $n \to \infty$:

64) $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$

65) $\binom{n+k-1}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$

66) Zeigen Sie die folgende asymptotische Beziehung für die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen für festes k und $n \to \infty$:

$$[n]_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = n^k + O(n^{k-1}).$$

67–68) Man zeige mit Hilfe der Stirlingschen Approximationsformel $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$:

67)
$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

68)
$$\binom{3n}{n} \sim \left(\frac{27}{4}\right)^n \sqrt{\frac{3}{4\pi n}}$$

69) Man bestimme die Größenordnungen von

(a) $2.7n^2 - 0.5n + 1$,

(b) $0.35 \cdot 2^n + 5n^5$,

(c) $\sqrt{1 + 1.1n^2}$.

70) Man zeige:

(d) $a_n = O(1) \Leftrightarrow (a_n)$ beschränkt, und

(e) $a_n = o(1) \Leftrightarrow (a_n)$ Nullfolge.

71–76) Man bestimme die Partialsummenfolge und ermittle dann gegebenenfalls den Grenzwert der Reihe. (Hinweis: Man stelle die Summanden als Differenz bzw. Summe passender Ausdrücke dar.)

71) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+2)}$

72) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

73) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

74) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)!}$

75) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$

76) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$

77–78) Man berechne unter Benützung der komplexen Zahlen und der Moivreschen Formel $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ den Grenzwert der Reihe:

77) $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{2^n}$

78) $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{2^n}$

79) Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sei $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $c_n = \frac{1}{n}$ und $d_n = \frac{1}{n+1}$. Weiters sei $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ und $D = \sum_{n=1}^{\infty} d_n$.

(a) Berechnen Sie die Partialsummen von B.

(b) Berechnen Sie den Wert von B.

(c) Begründen Sie $a_n \leq 2b_n$. Konvergiert A?

(d) Warum ist $B = C - D$ falsch, obwohl $b_n = c_n - d_n$?

80–89) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

80) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3n^2+1}{5n^3-2}$

81) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-2}{2n^3+5n-3}$

82) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{6^n}$

83) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$

Hinweis: Man benütze die aus der Bernoullischen Ungleichung folgende Ungleichung $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

84) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2n^2+1}{n^4+2}$

85) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+3}{7n^2-2n+1}$

86) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{3^n}$

87) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!}$

88) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n^2+1)^n}{\sqrt{n}^{n^2}}$

89) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3^{n^2}}{n^n}$

90–93) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

90) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}$

91) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}+5n}$

92) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+2}}$

93) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+3)^{4/3}}$

94) Sei $a_n \geq 0$ und die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergent. Man zeige, dass dann auch die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ konvergiert.

95) Gilt Bsp. 94) auch ohne die Voraussetzung $a_n \geq 0$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

96) Sei $a_n \geq 0$ und die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergent. Man zeige, dass dann auch die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n^3$ konvergiert.

97) Gilt Bsp. 96) auch ohne die Voraussetzung $a_n \geq 0$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

98) Es sei $\lim a_n = a$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\geq 0}(a_{n+1} - a_n)$.

99) Es sei $\lim a_n = a$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\geq 0}(a_{n+2} - a_n)$.

100) Es sei $\lim a_n = 0$. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $\sum_{n\geq 0}(-1)^n(a_{n+1} + a_n)$.

101–104) Man zeige, dass die folgende Funktionenreihen im jeweils angegebenen Bereich konvergieren:

101) $\sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n, \quad |x|<1$

102) $\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}x^n, \quad |x|<\frac{1}{4}$

103) $\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z\in\mathbb{C}$

104) $\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z\in\mathbb{C}$

105–106) Man untersuche, für welche $x\in\mathbb{R}$ die folgende Funktionenreihe konvergiert:

105) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(x-1)^n$

106) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}(x+1)^n$

107) Man zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}, \qquad a,b\in\mathbb{R}\,.$$

108) Man zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n b^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-b)^n}{n!}, \qquad a,b\in\mathbb{R}\,.$$

109–112) Man zeichne den Graphen der Funktion $f(x)$ und bestimme alle Stellen, an denen $f(x)$ stetig ist. ($\operatorname{sgn}(x)=1$ für $x>0$, $\operatorname{sgn}(x)=-1$ für $x<0$ und $\operatorname{sgn}(0)=0$.)

109) $f(x)=(x-\pi/2)\operatorname{sgn}(\cos x)$

110) $f(x)=(x^2-1)\operatorname{sgn}(\sin(\pi x))$

111) $f(x)=x\operatorname{sgn}(\sin x)$

112) $f(x)=x\sin\left(\frac{\pi}{3}\operatorname{sgn}(x)\right)$

113) Man skizziere den Verlauf der Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(1/x)$ und beweise, dass $f(x)$ an der Stelle $x_0=0$ keinen Grenzwert besitzt, indem man die beiden Folgen $x_n=1/(n\pi)$ und $x_n=1/(2n\pi+\pi/2)$ betrachtet.

114–117) Man zeige, dass die folgenden Funktionen stetige Umkehrfunktionen haben und bestimme diese:

114) $f(x)=\frac{1-x^3}{x^3}, \quad D_f=(1,\infty)$

115) $g(x)=(1+\sqrt{x})^7, \quad D_g=(0,\infty)$

116) $f(x)=\frac{1-x^7}{x^7}, \quad D_f=(1,\infty)$

117) $g(x)=(1+\sqrt{x})^5, \quad D_g=(0,\infty)$

118) Man zeige mit Hilfe des Nullstellensatzes, dass die Funktion $y=e^{x/2}-4x+1$ im Intervall $[0,1]$ sowie im Intervall $[6,7]$ je eine Nullstelle besitzt. Wie können diese Nullstellen näherungsweise berechnet werden?

119) Man skizziere die Graphen der Funktionen

$$f_1(x)=\cos x, \quad f_2(x)=\frac{1}{\cos x}, \quad f_3(x)=\cos^2 x, \quad f_4(x)=|\cos x|, \quad f_5(x)=\sqrt{|\cos x|}$$

im Intervall $[0,\pi]$ und untersuche alle Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

120) Sei $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ stetig, $f(0)=0$, $f(a)>a$ und $f(x)\neq x$ für $0<x<a$. Man zeige, dass dann auch $f(x)>x$ für $0<x<a$ gilt.

121) Man zeige, dass es zu jeder stetigen Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ wenigstens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$ gibt.

122–127) Man untersuche, wo die Funktion $f(x)$ differenzierbar ist und bestimme dort $f'(x)$:

122) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 2}}$

123) $f(x) = \text{Arcsin}\left(\sqrt[3]{x^2 - 2}\right)$

124) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{\sqrt{x^2 - 6x + 3}}$

125) $f(x) = \text{Arccos}\left(\sqrt[4]{x^2 - 2}\right)$

126) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 3}}$

127) $f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}\right)$

128–129) Man zeige mittels Differenzieren:

128)

$$\text{Arctan}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + \frac{1}{2}\text{Arcsin}x = \frac{\pi}{4}, \qquad x \in (-1, 1)$$

129)

$$\text{Arcsin}x = \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right), \qquad x \in (-1, 1)$$

130) Zeigen Sie: Sind $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ differenzierbar und $g_j(x) \neq 0$ für alle j, so gilt

$$\frac{\left(\prod_{j=1}^{m} g_j(x)\right)'}{\prod_{j=1}^{m} g_j(x)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{g_j'(x)}{g_j(x)}\,.$$

131) Wie ist t zu wählen, damit die Funktion $f(x) = (x^2 + t)/(x - t)$ in einer Umgebung der Stelle $x_0 = 1$ streng monoton fallend ist? Machen Sie eine Skizze.

132) Man diskutiere die Funktion $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ im Intervall $I = [-\pi, \pi]$.

133) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend und differenzierbar. Man zeige, dass dann $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

134) Folgt in Bsp. 133) aus der strengen Monotonie sogar $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

135) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und differenzierbar. Man zeige, dass dann $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

136) Folgt in Bsp. 135) aus der strengen Monotonie sogar $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

137) Man berechne die ersten 4 Ableitungen der Funktion $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$. Können Sie allgemein einen Ausdruck für die n-te Ableitung angeben?

138) Man leite die unendlichen Reihen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch Entwicklung der beiden Funktionen in eine Taylorreihe mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ her.

139) Man approximiere die Funktion $f(x) = 8(x + 1)^{3/2}$ in eine lineare bzw. eine quadratische Polynomfunktion im Punkt $x_0 = 0$. Wie groß ist jeweils der Fehler an der Stelle $x = 1/2$?

140) Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$ und $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

(a) Stellen Sie f, g und h als Potenzreihen mit Anschlussstelle $x_0 = 0$ dar und geben Sie deren Konvergenzradius an.

(b) Berechnen Sie das Cauchyprodukt der Reihen von f und g.

141–144) Die Abbildungen $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

141) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\cosh(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

142) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\sinh(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

143) Man beweise die Formel $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

144) Man beweise die Formel $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

145) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch Produktbildung zweier Potenzreihen.

146) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (1 - x^2)\cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch Produktbildung zweier Potenzreihen.

147) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = (1 + 3x - 3x^2)\cos x$ an der Stelle $x_0 = 1$ durch Produktbildung zweier Potenzreihen.

148) Wie 141, nur für $x_0 = 1$.

149) Wie 142, nur für $x_0 = 2$.

150) Wie 145, nur für $x_0 = 3$.

151) Wie 146, nur für $x_0 = -1$.

152) Wie 147, nur für $x_0 = -3$.

153) Wie 145, nur für $x_0 = -3$.

154) Wie 146, nur für $x_0 = -2$.

155) Man berechne die Grenzwerte nachstehender unbestimmter Formen:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{17x^2 + 4x - 1}{x^3 - 12x^2 + 1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

156) Man berechne die Grenzwerte nachstehender unbestimmter Formen:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\ln(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4}{e^{4x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1/2} (1 - 2x)\tan(\pi x)$

157–163) Man berechne die Grenzwerte nachstehender unbestimmter Formen:

157)

(a) $\lim\limits_{x\to 1} (\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3})$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{17x^2+4x-1}{x^3-12x^2+1}$

158)

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\ln(x)}$

159)

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\ln(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4}{e^{4x}}$

160)

(a) $\lim\limits_{x\to 1/2} (1-2x)\tan(\pi x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(1-x^2)}{(x-1)(\cos(x-1)-1)}$

161)

(a) $\lim\limits_{x\to 1-} \ln(1-x)\cdot\ln(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

162)

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{\tan(\pi x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

163)

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4}{e^{4x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1/2} (1-2x)\tan(\pi x)$

164) Man berechne den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x\sin x}.$$

165) Man berechne den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1-} \left(\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{1-x}\right).$$

166) Man berechne den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

167–169) Man bestimme mit Hilfe der Bisektion auf drei Dezimalstellen genau die positive Nullstelle der Funktion $f(x)$ im angegebenen Intervall I:

167) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$, $I = [\pi/2, \pi]$.

168) $f(x) = \cos x - x$, $I = [0, \pi/2]$.

169) $f(x) = (\tan x)^2 - x$, $|x| < \frac{\pi}{4}$

170) Lösen Sie Aufgabe 167 mit Hilfe des Newton-Verfahrens und mit Hilfe der Regula falsi.

171) Lösen Sie Aufgabe 168 mit Hilfe des Newton-Verfahrens und mit Hilfe der Regula falsi.

172) Lösen Sie Aufgabe 169 mit Hilfe des Newton-Verfahrens und mit Hilfe der Regula falsi.

173) Gesucht ist eine in der Nähe von

$$(a) \quad x_0 = 3, \qquad \text{bzw.} \qquad (b) \quad x_0 = -3$$

gelegenen Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{-x} + x^2 - 10$.

174) Nach welcher Zeit t (in Stunden) erreichen die Betriebskosten

$$B(t) = 10.45t + 0.0016t^2 + 17200\big(1 - e^{-0.0002t}\big)$$

eines Netzwerkrouters den Anschaffunspreis $A = 100.000,-$ € ? Ist die Lösung eindeutig bestimmt?
(Anleitung: Man bilde die Funktion $f(t) = B(t) - A$, untersuche deren Monotonieverhalten und bestimme schließlich die gesuchte Nullstelle mit Hilfe des Newton-Verfahrens.)

175) Man zeige, dass $f(x) = x^4 - x - 1$ in $[1, 2]$ eine Nullstelle hat und bestimme diese näherungsweise mit (wenigstens) 4 Schritten der Bisektion und der Regula falsi.

176) Man ermittle für sämtliche Nullstellen der Funktion $f(x) = 3x + 2\sin^2 x + 1$ Näherungen, indem man jeweils 4 Schritte des Newtonverfahrens durchführt.

177–178) Bestimmen Sie eine Nullstelle der Funktion $F(x) = x^2 - 1$ im Intervall $[0, 3]$, indem Sie jeweils 3 Schritte der angegebenen Verfahrens durchführen, und vergleichen Sie die Ergebnisse.

177) a) Bisektion, b) Regula falsi, c) Newtonsches Näherungsverfahren (Startwert Intervallende)

178) a) Iterative Fixpunktbestimmung für $x = f(x) = (x^2 + 3x - 1)/3$ (Startwert Intervallende), b) iterative Fixpunktbestimmung für $x = g(x) = (1 + 2x - x^2)/2$ (Startwert Intervallende), c) wählen Sie eine andere Funktion $h(x)$, sodaß die Gleichung $h(x) = x$ äquivalent ist zur Gleichung $F(x) = 0$.

179) Man zeige, dass die Funktion $\varphi(x) = x - e^{-x} + \cos x$ eine kontrahierende Abbildung des Intervalls $[1.2, 1.3]$ in sich ist, und berechne den (einzigen) Fixpunkt x^* dieser Funktion im angegebenen Intervall (Genauigkeit: zwei Nachkommastellen)
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß im angebenen Intervall $f''(x) < 0$ gilt. Was kann man daraus für $f'(x)$ schließen? Benutzen Sie dies, um die Kontraktionseigenschaft zu zeigen!).

180) Man bestimme die Lösungsfolge der beim "Babylonischen Wurzelziehen" auftretenden Iteration

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(wobei $a > 0$, $x_0 > 0$ ist) auf graphischem Weg und zeige, dass stets

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq \sqrt{a}$$

gilt, d.h., die Iterationsfolge (x_n) ist ab $n = 1$ monoton fallend und nach unten durch $\sqrt{a}$ beschränkt.

181) Man zeige: Für $a > 0$ konvergiert die Iterationsfolge (x_n) gemäß $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$ mit $\frac{1}{2a} < x_0 < \frac{3}{2a}$ gegen den Fixpunkt $x^* = \frac{1}{a}$. Diese Iteration stellt somit ein Verfahren zur Division unter ausschließlicher Verwendung von Multiplikationen dar.

182) Für die Funktion $f(t) = \begin{cases} -1 & (t \leq 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$ berechnen Sie $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Ist $F(x)$ stetig bzw. differenzierbar?

183) Wie 182) für $f(t) = \begin{cases} -2 & (t \leq 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$. **184)** Wie 182) für $f(t) = \begin{cases} -1 & (t \leq 1) \\ t & (t > 1) \end{cases}$.

185) Wie 182) für $f(t) = \begin{cases} -t^2 & (t \leq 2) \\ t^2 & (t > 2) \end{cases}$. **186)** Wie 182) für $f(t) = \begin{cases} -t^3 + 1 & (t \leq 3) \\ t^3 - 1 & (t > 3) \end{cases}$.

187) Berechnen Sie $\int_1^2 x^2 dx$ mit Hilfe von Obersummen bei äquidistanter Teilung.

188) Berechnen Sie $\int_2^3 x^2\,dx$ mit Hilfe von Untersummen bei äquidistanter Teilung.

Hinweis zu 187) und 188): $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

189) Berechnen Sie $\int_1^2 x^3\,dx$ mit Hilfe von Untersummen bei äquidistanter Teilung. (Hinweis: $\sum_{k=1}^n k^3 = \binom{n+1}{2}^2$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{2}$.)

190) Sei $a \geq 0$. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{a+1}} \sum_{k=1}^n k^a$$

durch Interpretation als Grenzwert Riemannscher Zwischensummen.

191) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k(n-k)$$

durch Interpretation als Grenzwert Riemannscher Zwischensummen.

192) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}$$

durch Interpretation als Grenzwert Riemannscher Zwischensummen.

193) Berechnen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(n+k)(n-k)}$$
durch Interpretation als Grenzwert Riemannscher Zwischensummen.

194) Berechnen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$$
durch Interpretation als Grenzwert Riemannscher Zwischensummen.

Hinweis: Man substitutiere im auftretenden Integral $x = \frac{1+t}{2}$.

195) Mit Hilfe der Substitutionsregel beweise man die nachstehende Integrationsregel
$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C$$
und berechne damit $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x}$.

196) Man berechne $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx.$
(Anleitung: Zum Integrieren wähle man die Substitution $u = \sqrt{x-1}$. Ferner beachte man, dass das angegebene Integral sowohl bei $x = 1$ als auch bei $x = \infty$ uneigentlich ist.)

197–236) Man berechne:

197) $\displaystyle\int_1^2 \left(\sqrt[4]{x\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x}}\right)}\right)^5 dx$

198) $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin^2 x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$

199) $\displaystyle\int_0^1 x \arccos x \, dx$

200) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \cos^2 x \, dx$

201) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$

202) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$

203) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx$

204) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

205) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$

206) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

207) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\, dx$

208) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\, dx$

209) $\displaystyle\int_1^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$

210) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}\, dx$

211) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

212) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

213) $\displaystyle\int x \mathrm{arcsin} x \, dx$

214) $\displaystyle\int \frac{4x^3 + x^2 + 3x + 5}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}\, dx$

215) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+1}\, dx$

216) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+7}{x^2+5x+6}\, dx$

217) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx$

218) $\displaystyle\int \frac{x^3-x^2+2}{x^3-3x+2}\,dx$

219) $\displaystyle\int \frac{x^6-6x+\sqrt{12x}}{x^2}\,dx$

220) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

221) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+9}$

222) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin^2 x\cos^2 x}$

223) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x-6}\,dx$

224) $\displaystyle\int \text{arccos}x\,dx$

225) $\displaystyle\int x\text{arctan}\,(x)\,dx$

226) $\displaystyle\int \frac{(x-3)^2}{x^{-7/2}}\,dx$

227) $\displaystyle\int x(\ln x)^2\,dx$

228) $\displaystyle\int (\sin x)(1+2\cos x)^4\,dx$

229) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$

230) $\displaystyle\int (x^2+1)e^{-2x}\,dx$

231) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$

232) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{2x^2+7}\,dx$

233) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}\,dx$

234) $\displaystyle\int \sqrt{1+7x^2}\,dx$

235) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

236) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

237–246) Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

237) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^{3/2}}\,dx$

238) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$

239) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx$

240) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

241) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

242) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^{x^3}}\,dx$

243) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+3}{2x^2+3x+2}\,dx$

244) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^x}{e^{x^2}}\,dx$

245) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x-1}{3x^3+2x^2+3x+5}\,dx$

246) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

Hinweis: Einmal partiell integrieren und erst danach die Konvergenzuntersuchung vornehmen.

247–250) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale näherungsweise auf 3 Dezimalstellen (mit und ohne Computer).

Hinweis: Entwickeln Sie den Integranden in eine Taylorreihe. Wieviele Terme sind nötig, um die gewünschte Genauigkeit zu erzielen?

247) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2}-1+x^2}{x^4}\,dx$

248) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(u^2)}{u}\,du$

249) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t^2)-1}{t^2}\,dt$

250) $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln\frac{1}{1-x^3}\,dx$

251–262) Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, ob die folgenden Reihen konvergieren:

251) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(\ln^2 n - \ln n - 6)}$

252) $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

253) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln^\alpha n} \qquad (\alpha > 0)$

254) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(1+n^2)\arctan n}$

255) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)^\alpha} \qquad (\alpha > 0)$

256) $\sum_{n\geq 10} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n) \ln(\ln(\ln n))^5}$

257) $\sum_{n\geq 0} ne^{-n}$

258) $\sum_{n\geq 0} ne^{-n^2}$

259) $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln^3(\ln n)}{n \ln n}$

260) $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{\sqrt{(1+n^2)^3}}$

261) $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

262) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2\sqrt{1+n^2}}$

263) Man zeige, dass die Ungleichung $|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$ in jedem metrischen Raum (X,d) für alle $x, y, z \in X$ gilt.

264) Für jede der Metriken $d = d_1$ (Summen-Metrik), $d = d_2$ (Euklidische Metrik), $d = d_\infty$ (Maximums-Metrik) und $d = d_H$ (Hamming-Metrik) auf $\mathbb{R}^2$ beschreibe man die abgeschlossene Einheitskugel $\bar{K}_d(\vec{0}, 1) = \{\vec{x} \mid d(\vec{0}, \vec{x}) \leq 1\}$ geometrisch (inkl. Skizze).

265) Wie 264), aber für $\mathbb{R}^3$.

266) (X,d) sei ein beliebiger metrischer Raum und $p \in X$. Man zeige, dass durch

$$d_p(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ d(x,p) + d(p,y), & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik auf X definiert wird.

267) Man zeige, dass die Hamming-Metrik auf $\mathbb{R}^n$ nicht durch eine Norm induziert wird.

268) Für fest gewählte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, bezeichne $C[a,b]$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Man zeige, dass die durch $||f|| := \int_a^b |f(x)| dx$ definierte Funktion $|| \cdot ||$ eine Norm auf $C[a,b]$ ist.

269) Für fest gewählte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, bezeichne $I[a,b]$ die Menge aller integrierbaren Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Man überprüfe, ob die durch $||f|| := \int_a^b |f(x)| dx$ definierte Funktion $|| \cdot ||$ eine Norm auf $I[a,b]$ ist.

270) Man betrachte den metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$, wobei d die euklidische Metrik ist. Man zeige, dass in diesem Raum die Menge $\mathbb{Q}$ weder offen noch abgeschlossen ist.

271) Man bestimme alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen in $(\mathbb{R}, d_H)$, wobei d_H die Hamming-Metrik ist.

272) Man zeige, dass eine Menge $O \subseteq \mathbb{R}^2$ bzgl. der Euklidischen Metrik d_2 offen ist genau dann, wenn O offen ist bzgl. der Summen-Metrik d_1.

273) Man zeige, dass eine Menge $O \subseteq \mathbb{R}^2$ bzgl. der Euklidischen Metrik d_2 offen ist genau dann, wenn O offen ist bzgl. der Maximums-Metrik d_∞.

274) Man zeige, dass eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ bzgl. der Euklidischen Metrik d_2 abgeschlossen ist genau dann, wenn A abgeschlossen ist bzgl. der Summen-Metrik d_1.

275) Man zeige, dass eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ bzgl. der Euklidischen Metrik d_2 abgeschlossen ist genau dann, wenn A abgeschlossen ist bzgl. der Maximums-Metrik d_∞.

276–278) Man stelle den Definitionsbereich und den Wertebereich folgender Funktionen fest und beschreibe die Höhenlinien:

276)

$$(a) \quad z = x^2 - y^2, \qquad\qquad (b) \quad z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}.$$

277)

$$(a) \quad z = xy, \qquad\qquad (b) \quad z = \frac{x}{y}.$$

278)

$$(a) \quad z = x^2 y, \qquad\qquad (b) \quad z = \frac{x}{y^2}.$$

279) Gegeben sei die Polynomfunktion $f(x, y) = xy^2 - 10x$. Man bestimme die Gleichungen ihrer Schnittkurven mit den senkrechten Ebenen $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ sowie die Höhenlinien für $z = z_0$ und skizziere alle drei Kurvenscharen. Mittels eines Computeralgebrasystems ermittle man eine 3D-Darstellung der gegebenen Funktion.

280) Wie Bsp 279 mit der Funktion $f(x, y) = x^2 y + 2x - y$.

281) Gegeben sei die quadratische Form $q(\mathbf{x}) = q(x, y) = 4x^2 + 2bxy + 25y^2$ mit $b \in \mathbb{R}$. Wie lautet die zugehörige symmetrische Matrix A, sodass $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$? Für welche Werte von b ist die Form positiv definit?

282) Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass die quadratische Form $3x^2 + axy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$ positiv definit ist.

283) Wie 282 für $x^2 + axy + 3xz + y^2 - 2yz + 4z^2$.

284) Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass die quadratische Form $-x^2 + axy - 3xz + y^2 - 2yz + 4z^2$ negativ definit ist.

285–290) Bestimmen Sie das Definitheitsverhalten der folgenden Matrizen:

285) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}$

286) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -10 \end{pmatrix}$

287) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & -7 & -20 \end{pmatrix}$

288) $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$

289) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

290) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hinweis: Setzen Sie den Vektor $(1, 0, 0)$ und den Vektor $(0, 0, 1)$ in die der Matrix entsprechenden quadratischen Form ein.

291) Eine Funktion $f(x_1,\dots,x_n)$ heißt **homogen** vom Grad r, falls für jedes feste $\lambda > 0$ und alle $(x_1,\dots,x_n)$ aus dem Definitionsbereich von f, für die $(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$ auch im Definitionsbereich von f liegt, gilt:

$$f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n) = \lambda^r f(x_1,\dots,x_n).$$

Man beweise, dass die beiden Produktionsfunktionen $f(x,y) = cx^\alpha y^{1-\alpha}$ und $g(x,y) = (cx^\alpha + dy^\alpha)^{1/\alpha}$ (x Arbeit, y Kapital, c, d, α konstant) homogene Funktionen vom Homogenitätsgrad $r = 1$ sind.

292) Man prüfe nach, ob die Funktionen

(*a*) $f(x,y,z) = x + (yz)^{1/2}$ (für $y,z \geq 0$) (*b*) $f(x,y) = x^2 + y$

(*c*) $f(x,y) = ax^b y^c$ (mit $a,b,c \in \mathbb{R}$, $x,y > 0$)

homogen sind.

293–294) Man untersuche für beliebige $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ den Grenzwert $\lim_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t)$. Ist die Funktion $f(x,y)$ an $(0,0)$ stetig?

293)

$$f(x,y) = \frac{|y|}{|x|^3 + |y|} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 1$$

294)

$$f(x,y) = \frac{2y^2}{|x| + y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 0$$

295) Sei

$$f(x,y) = \frac{x\cos\frac{1}{x} + y\sin y}{2x - y}$$

für $0 \neq 2x \neq y$. Man untersuche und vergleiche die iterierten Grenzwerte

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y).$$

Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

296) Sei

$$f(x,y) = \frac{x + y\cos\frac{1}{y}}{x + y}$$

für $0 \neq y \neq -x$. Man untersuche und vergleiche die iterierten Grenzwerte

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y).$$

Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

297) Sei

$$f(x,y) = x^{1/y}$$

für $y > 0$ und $x \geq 0$. Man untersuche und vergleiche die iterierten Grenzwerte

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1} f(x,y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 1}\lim_{y\to 0} f(x,y).$$

Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$?

298) In welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig?

299–300) Man untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit (Hinweis: Es gilt $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ für $a, b \geq 0$.):

299)

$$f(x,y) = \frac{xy}{|x| + |y|} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 0.$$

300)

$$f(x,y) = \frac{xy^2 + x^2y}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 0.$$

301) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = \frac{1-\cos(xy)}{xyz} + \frac{\sin z}{1+x^2+y^2}$. In welchen Punkten des Definitionsbereiches ist f stetig?

302) Zeigen Sie: Die Komposition stetiger Funktionen $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $g : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(I) \subseteq M$ is wiederum stetig.

303) Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

304) Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

305)

(a) Für die Funktion $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ berechne man die partiellen Ableitungen f_x, f_y und die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x_0, y_0) = (0.2, 0.3)$.

(b) Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktion $f(x,y) = x^2 \sin y + \cos(x + 2y)$.

306) Man prüfe nach, ob die gemischten partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx} für die folgenden Funktionen $f(x,y)$ übereinstimmen:

$$(a) \quad f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}, \qquad (b) \quad f(x,y) = x^3 e^{y^2}, \qquad (c) \quad f(x,y) = \sqrt{xy^3}.$$

307–308) Man bestimme den Definitionsbereich der Vektorfunktion $\mathbf{x}(t)$, sowie die Ableitung $\mathbf{x}'(t)$, wo sie existiert:

307)

$$\mathbf{x}(t) = \left(\left(\frac{2t}{\sqrt{1-3t^2}}\right)^{\frac{5}{4}}, \sin\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\right)$$

308)

$$\mathbf{x}(t) = \left(\sin(1+\cos(t)), \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

309) Das elektrostatische Potential einer Punktladung Q im Koordinatenursprung ist durch

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

gegeben, für das Potential eines Dipols mit dem Dipolmoment $\mathbf{p} = (p,0,0)$ gilt:

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

(Dabei sind Q, p und ϵ_0 Konstante.) In beiden Fällen berechne man das zugehörige elektrische Feld $\mathbf{E}$ nach der Formel $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi$.

310–313) Man bestimme die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktionen:

310) $f(x,y) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{4x^2y^2}{1+x+y}\right)$

311) $f(x,y,z) = \frac{y+\sqrt{xz}}{1+\sin^2(xyz)}$

312) $f(x,y) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x^3y}{y-x^3}\right)$

313) $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x}+y^3z^2}{1+\cos^2(1+x)}$

314–317) Man bestimme die Funktionalmatrix zu $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

314) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x+y-z) \\ \cos\left(\frac{xy}{z}\right) \end{pmatrix}$

315) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{y^2z} \\ x^yz^2 \end{pmatrix}$

316) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x-z}{y+1}} \\ z\cdot e^{-\frac{x}{y}} \end{pmatrix}$

317) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(\operatorname{Arctan}(x+y^2)) \\ x\cos(y^2-\sqrt{x})\cdot\tan(xyz) \end{pmatrix}$

318) Duch $z = \frac{xy}{x+y}$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Beschränkung von x und y auf die Werte $x = e^t$ und $y = e^{-t}$ $(t \in \mathbb{R})$ liefert eine Kurve auf dieser Fläche. Man bestimme $\frac{dz}{dt}$ mittels Kettenregel und mache die Probe, indem man zuerst x und y in z einsetzt und anschließend nach dem Parameter t differenziert. Wo verläuft diese Kurve auf der Fläche horizontal?

319) Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}g(u,v) = \ln(u\sin(u)-v)$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}g(u,v) = \tan(-u+v^3)$. Man bestimme $h(t) = \frac{d}{dt}g(2t, t^2+1)$.

320) Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}g(u,v) = e^{-u^2}$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}g(u,v) = -e^{v^3}$. Man bestimme $h(t) = \frac{d}{dt}g(t^2-1, 3t)$.

321) Mit Hilfe der Kettenregel berechne man den Wert der partiellen Ableitung der Funktion $F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$ nach y an der Stelle $(0, 0)$, wobei $f(u, v) = u^2 + v^2$, $g(x, y) = \cos x + \sin y$ und $h(x, y) = x + y + 1$ ist.

322) Es sei $F(x, y) = \frac{2x^4+y}{y^5-2x}$, $x = 2u - 3v + 1$, $y = u + 2v - 2$. Man berechne $\frac{\partial F}{\partial u}$ und $\frac{\partial F}{\partial v}$ für $u = 2$, $v = 1$ mit Hilfe der Kettenregel.

323) Man bestimme die Ableitung der Funktion $f(x, y)$ in Richtung $\frac{\binom{-1}{1}}{\|\binom{-1}{1}\|}$ im Punkt $(3, 2)$ mit

$$(a) \quad f(x, y) = \frac{x^2}{1 + y^2}, \qquad (b) \quad f(x, y) = x^3 e^{y^2}, \qquad (c) \quad f(x, y) = \sqrt{xy^3}.$$

324) Man berechne die Ableitung von $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ im Punkt $P_0(3, 2)$

(a) in Richtung der Koordinatenachsen,

(b) in Richtung von $(-1, -1)$, sowie

(c) in Richtung von $\operatorname{grad} f$.

325) In welcher Richtung erfolgt die maximale Änderung von

$$f(x, y, z) = x^2 \sin(yz) - y^2 \cos(yz)$$

vom Punkt $P_0(4, \frac{\pi}{4}, 2)$ aus und wie groß ist sie annähernd?

326) Man bestimme die lineare und die quadratische Approximation der Funktion

$$f(x, y) = x^2(y - 1) + xe^{y^2}$$

im Entwicklungspunkt $(1, 0)$.

327) Für die Funktion $f(x, y) = xye^{x+y}$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

328) Für die Funktion $f(x, y) = x \ln(1 + xy)$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

329) Für die Funktion $f(x, y) = e^{x-y}(x + 1) + x \sin(x^2 - y)$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$.

330) Für die Funktion $f(x, y, z) = e^{x^2+yz}(x + yz + 1)$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \frac{\pi}{2})$.

331) Für die Funktion $f(x, y, z) = x^3 \cos(x^2 - \arctan(y - z))$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \frac{\pi}{2})$.

332) Für die Funktion $f(x, y, z) = x \cos(x - y - z))$ berechne man das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$.

333) Man bestimme $\frac{dy}{dx}$ für folgende implizit gegebene Kurven:

$$(a) \quad x^{2/3} + y^{2/3} = 1, \ \text{für } x_0 = 0.5, \qquad (b) \quad x^3 + y^3 - 2xy = 0, \ \text{für } x_0 = 1.$$

334) Es sei $F(x, y) = e^x \sin y + e^y \sin x - 1 = 0$. Man berechne $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ im Punkt $(\pi/2, 0)$.

335) Es sei $F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 - 1 = 0$. Man berechne y' und y'' im Punkt $(1, -\sqrt{3})$.

336) Man berechne y' und y'' im Punkt $(1,1)$ der Kurve $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$.

337) Es sei $F(x,y,z) = x^2(2x+3z) + y^2(3x-4z) + z^2(x-2y) - xyz = 0$. Man berechne z_x und z_y.

338) In welchen Punkten der Kurve $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$ sind die Tangenten horizontal, in welchen vertikal?

339) Bestimmen Sie alle Tangenten mit Anstieg ± 1 an die Kurve $2x^2 - 4xy + 9y^2 = 36$.

340) Man ermittle die Gleichungen einer Tangente aus dem Punkt $(0,0)$ an die durch $y^3 = x^3 - 2x + 2$ bestimmte Kurve.

341–351) Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist.

341) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

342) $f(x,y) = 2x^3 - 5xy^2 + 3y$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

343) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

344) $f(x,y) = (x^2 + 5y^2)e^{-x^2-y^2}$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

345) $f(x,y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-2y^2}$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

346) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi/2$.

347) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi$.

348) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x - \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi/2$.

349) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x - \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi$.

350) $f(x,y) = \cos(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi/2$.

351) $f(x,y) = \cos(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi$.

352) Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = 4(x-2)(y^2+10y) + 3x^3$.

353) Man bestimme die Extrema von $f(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2$.

354) Gesucht ist das absolute Maximum der Funktion $f(x,y) = xy(3-x-y)$ auf dem Definitionsbereich $D = \{(x,y) | x \ge 0, y \ge 0, y \le 3-x\}$.
(Anleitung: Man skizziere den Definitionsbereich D in der (x,y)-Ebene, bestimme dessen Rand und ermittle alle Funktionswerte auf dem Rand. Das absolute Maximum ist dann unter den relativen Maxima im Inneren von D sowie unter den Funktionswerten am Rand von D zu suchen.)

355–361) Berechnen Sie die folgenden Bereichsintegrale:

355) $\iint_B (xy + x^2 - y^2)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Rechtecksbereich sei, welcher durch die Eckpunkte $(-1,1)$, $(5,1)$, $(5,5)$ und $(-1,5)$ bestimmt ist.

356) $\iint_B (x + 2xy - y^2)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Rechtecksbereich sei, welcher durch die Eckpunkte $(3,1)$, $(4,1)$, $(4,5)$ und $(3,5)$ bestimmt ist.

357) $\iint_B \mathrm{e}^{2x}(y+1)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Rechtecksbereich sei, welcher durch die Eckpunkte $(-2,0)$, $(4,0)$, $(4,3)$ und $(-2,3)$ bestimmt ist.

358) $\iint\limits_B \sin(x+y)\,dx\,dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$, (π,π) sei.

359) $\iint\limits_B x^2 \ln(y)\,dx\,dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Bereich $\{(x,y) \mid 1 \le y \le 2 \text{ und } |x| \le 2\}$ sei.

360) $\iiint\limits_B (xy^2z + 2z^2)\,dx\,dy\,dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Bereich $\{(x,y,z) \mid 1 \le x \le 2, |y| \le 2 \text{ und } 0 \le z \le 1\}$ sei.

361) $\iiint\limits_B \left(\mathrm{e}^{2x}(y+1) + x\sin(z)\right)\,dx\,dy\,dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Bereich $\{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 2, |y| \le 1 \text{ und } 0 \le z \le \pi\}$ sei.

362) Durch Einsetzen bestätige man, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6y = 12\ln x$$

durch

$$y(x) = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \frac{1}{3}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = 2/3$, $y'(1) = -1$?

363) Man betrachte die Eulersche Differentialgleichung

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Zeigen Sie, dass $C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{\ln x}{x}$ die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = 3$, $y'(1) = -2$?

364) Man ermittle das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x}$ und überlege, ob es durch jeden Punkt der (x,y)-Ebene genau eine Lösung der Gleichung gibt.

365) Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = axy$ mit a reell. Skizzieren Sie das Richtungsfeld und die Isoklinen für $a = -2$, $a = -1$ und $a = 1$.

366) Skizzieren Sie mit Hilfe der Isoklinen das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{xy}{x^2+1}$$

und finde die allgemeine Lösung.

367) Skizzieren Sie mit Hilfe der Isoklinen das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = \frac{x}{x-y}$.

368) Man löse die homogene lineare Differentialgleichung $y' - y\tan x = 0$.

369) Man löse die inhomogene lineare Differentialgleichung $xy' + y = x^2 + 3x + 2$.

370) Man bestimme die Lösung der Differentialgleichung $y' + y\cos x = \sin x\cos x$ zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

371–376) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bzw. die Lösung der Anfangswertaufgabe:

371) $y' = y\sin x$

372) $y - xy' + 1 = 0$

373) $y' + \frac{1}{1-x}y = x^2,\ y(0) = 1$

374) $y' + \frac{1}{1+2x}y = 2x - 3,\ y(0) = 2$

375) $y' = \sin^2 x \cos^2 y$

376) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$

377) Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 8y' - 20y = 0,\\ &(b) \quad y'' + 8y' + 16y = 0,\\ &(c) \quad y'' - 8y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

378) Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 6y' - 27y = 0,\\ &(b) \quad y'' + 6y' + 9y = 0,\\ &(c) \quad y'' - 6y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

379) Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 12y' + 36y = 0,\\ &(b) \quad y'' + 12y' + 60y = 0,\\ &(c) \quad y'' - 12y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

380) Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 10y' + 100y = 0,\\ &(b) \quad y'' + 10y' + 16y = 0,\\ &(c) \quad y'' - 10y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

381) Man bestimme die partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2y' + 2y = 0$ zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

382) Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - y' - 2y = x$.

383–407) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen.

383) $xy' - y = x^3 + 3x^2 - 2x$

384) $y' + \frac{y}{x} - e^x = 0$

385) $y' + 2(\cot x)y + \sin 2x = 0$

386) $y' + y \cot x = 5e^{\cos x}$ (für $x = \pi/2$ sei $y = -4$)

387) $(1 + e^x)y' = -e^{x+y}$

388) $xy' = y + x^2 \cos x$

389) $y'' - y = 4e^x$

390) $y'' + 7y' + 6y = \cosh(x)$

391) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

392) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$

393) $y'' - 2y' = e^x \sin x$

394) $y'' + y = \cos x$

395) $y'' - 6y' + 9y = x^2 e^{3x}$

396) $y'' + 3y' + y = x3^x$

397) $y'' - y' + y = x$

398) $y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\ln x}{x}$

399) $y' + 2xy = 2xy^3$

400) $y' = (1-2x)y + (1+x^2)$

401) $y' = y + xy + 1$

402) $y''' + y'' = 6x^2 + 4$

403) $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$. Ansatz: $y = x^r$.

404) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$. Ansatz: $y(x) = x^r$.

405) $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$. Ansatz: $y = x^r$.

406) $x^2y'' - xy' - 3y = x$. Ansatz für $y_h(x)$: $y = x^r$. Zur Bestimmung von $y_p(x)$ versuchen Sie die Standardansätze.

407) $x^2y'' + xy' - 3y = 5x^2$. Ansatz für $y_h(x)$: $y = x^r$. Zur Bestimmung von $y_p(x)$ versuchen Sie die Standardansätze.