ANA, 2013W

Übungsaufgaben zur Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Blatt 2

7. Man finde eine explizite Darstellung für die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

und berechne damit – wenn möglich – die Summe.
(Hinweis: Man stelle die Summanden als Differenzen passender Ausrücke dar.)

8. Mit Hilfe eines geeigneten Konvergenzkriteriums untersuche man die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\frac{1}{2^1} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^5} + \frac{7}{2^7} + \ldots$ (b) $\frac{1}{11} + \frac{1}{101} + \frac{1}{1001} + \frac{1}{10001} + \ldots$

9. Man berechne mit Hilfe der komplexen Zahlen und unter Verwendung der Moivre'schen Formel $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ den Wert der beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}.$$

10. Man untersuche, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Funktionenreihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(x+1)^n .$$

11. Man bestimme die Größenordnungen von

(a) $3{,}9n^2 - n + 0{,}1$

(b) $3{,}9 \cdot 2^n + n^5$

(c) $\sqrt{1 + 2{,}3\ n^2}$.

Ferner zeige man, dass

(d) $a_n = O(1) \Leftrightarrow (a_n)$ beschränkt, und

(e) $a_n = o(1) \Leftrightarrow (a_n)$ Nullfolge.

12. Mit Hilfe der Stirling'schen Approximationsformel zeige man, dass

$$\binom{3n}{n} \sim \left(\frac{27}{4}\right)^n \sqrt{\frac{3}{4\pi n}} .$$