ANA, 2013W

Übungsaufgaben zur Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Blatt 3

13. Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert, indem man zwei geeignete Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n \leq a_n \leq c_n$ finde.

    (a) $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}$ (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

14. Was ist an nachstehender Rechnung falsch?

$$\begin{array}{lcccccccccccccl}
\ln 2 = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & +\frac{1}{9} & -\frac{1}{10} & +\frac{1}{11} & -\frac{1}{12}\pm\cdots & & \left.\right\} + \\
\frac{1}{2}\ln 2 = & 0 & +\frac{1}{2} & +0 & -\frac{1}{4} & +0 & +\frac{1}{6} & +0 & -\frac{1}{8} & +0 & +\frac{1}{10} & +0 & -\frac{1}{12}\pm\cdots & & \\
\hline
\frac{3}{2}\ln 2 = & 1 & & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{9} & & +\frac{1}{11} & -\frac{1}{6}\pm\cdots & =\ln 2 &
\end{array}$$

15. Für n = 1, 2, 3, ... sei

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad c_n = \frac{1}{n+1}, \quad d_n = \frac{1}{n+2}.$$

    Weiters sei

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad D = \sum_{n=0}^{\infty} d_n.$$

    (a) Berechnen Sie die Partialsummen von B.

    (b) Berechnen Sie den Wert von B.

    (c) Begründen Sie $a_n \leq 6b_n$ für $n \geq 1$. Konvergiert A?

    (d) Warum ist $B = C - D$ falsch, obwohl $b_n = c_n - d_n$?

16. Man leite die Funktionalgleichung $e^x\, e^y = e^{x+y}$ für die Exponentialfunktion aus deren Potenzreihendarstellung durch Bildung des Cauchyprodukts der entsprechenden Potenzreihen her.

17. Man skizziere die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = 1/\cos x, \quad f_3(x) = \cos^2 x, \quad f_4(x) = |\cos x|, \quad f_5(x) = \sqrt{|\cos x|}$$

    im Intervall $[0,\pi]$ und untersuche alle Funktionen auf Stetigkeit.

18. Die Abbildungen sinh, cosh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,.$$

Man skiziere die Graphen der beiden Funktionen und ihrer Umkehrfunktionen (wo sind diese überhaupt definiert?), und bestimme die Potenzreihenentwicklung von sinh(x) und cosh(x) an der Stelle $x_0 = 0$.