ANA, 2014W

Übungsaufgaben zur Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

1 Folgen, Reihen und Funktionen

1. Man finde ein Bildungsgesetz für die unendlichen Folgen:

   (a) 0,3; 0,09; 0,027; ... (b) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, ...$ (c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, ...$

   Wie groß ist dann jeweils das zwölfte Folgenglied?

2. Man untersuche nachstehende Folgen in Hinblick auf Monotonie, Beschränktheit und mögliche Grenzwerte. Ferner veranschauliche man die Folgen auf der reellen Zahlengeraden:

   (a) $(a_n) = 0, 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, ..., n, \frac{1}{n+1}, ...$

   (b) (b_n) mit $b_n = \frac{n+5}{n-1}$ für $n \geq 2$

   (c) (c_n) mit $c_n = (-1)^n \frac{n+2}{n}$ für $n \geq 1$

3. Gegeben sei die rekursiv definierte Folge (a_n) mit $a_0 = 1$ und

   $$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) \quad \text{für } n = 0,1,2,... .$$

   Man berechne die Folgenglieder a_n für $n = 0,...,10$, untersuche die Folge in Bezug auf Monotonie, Beschränktheit sowie Konvergenz und berechne – wenn möglich – den Grenzwert.

4. Man beweise, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt.

   (Anleitung: Zeigen Sie, dass $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$ eine Nullfolge ist. Dazu entwickle man die Darstellung $(1 + a_n)^n = n$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes und leite daraus die Ungleichung $a_n \leq \sqrt{2/n}$ her.)

5. Zu folgenden konvergenten Zahlenfolgen bestimme man den Grenzwert:

   (a) $x_n = \frac{n^3 - 4n^2 - 4n + 1}{2n^3 + 1}$ (b) $x_n = \sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 1}$

6. Seien P_1 und P_2 beliebige Punkte der Zahlengeraden. Man halbiere fortgesetzt die Strecke $\overline{P_1P_2}$ in P_3, die Strecke $\overline{P_2P_3}$ in P_4, $\overline{P_3P_4}$ in P_5, usw. und bestimme die Lage von P_n für $n \to \infty$.

7. Man finde eine explizite Darstellung für die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

und berechne damit – wenn möglich – die Summe.
(Hinweis: Man stelle die Summanden als Differenzen passender Ausrücke dar.)

8. Mit Hilfe eines geeigneten Konvergenzkriteriums untersuche man die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\frac{1}{2^1}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^5}+\frac{7}{2^7}+\ldots$ (b) $\frac{1}{11}+\frac{1}{101}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{10001}+\ldots$

9. Man berechne mit Hilfe der komplexen Zahlen und unter Verwendung der Moivre'schen Formel $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ den Wert der beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}.$$

10. Man untersuche, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Funktionenreihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(x+1)^n .$$

11. Man bestimme die Größenordnungen von

(a) $3{,}9n^2 - n + 0{,}1$

(b) $3{,}9 \cdot 2^n + n^5$

(c) $\sqrt{1+2{,}3\ n^2}$.

Ferner zeige man, dass

(d) $a_n = O(1) \Leftrightarrow (a_n)$ beschränkt, und

(e) $a_n = o(1) \Leftrightarrow (a_n)$ Nullfolge.

12. Mit Hilfe der Stirling'schen Approximationsformel zeige man, dass

$$\binom{3n}{n} \sim \left(\frac{27}{4}\right)^n \sqrt{\frac{3}{4\pi n}} .$$

13. Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert, indem man zwei geeignete Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n \leq a_n \leq c_n$ finde.

(a) $a_n = \frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}$ (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

14. Was ist an nachstehender Rechnung falsch?

$$\left.\begin{array}{lcccccccccccccl}
\ln 2 = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & +\frac{1}{9} & -\frac{1}{10} & +\frac{1}{11} & -\frac{1}{12} & \pm\cdots & \\
\frac{1}{2}\ln 2 = & 0 & +\frac{1}{2} & +0 & -\frac{1}{4} & +0 & +\frac{1}{6} & +0 & -\frac{1}{8} & +0 & +\frac{1}{10} & +0 & -\frac{1}{12} & \pm\cdots &
\end{array}\right\}+$$

$$\begin{array}{lcccccccccccccl}
\hline
\frac{3}{2}\ln 2 = & 1 & & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{9} & & +\frac{1}{11} & -\frac{1}{6} & \pm\cdots & = \ln 2
\end{array}$$

15. Für n = 1, 2, 3, ... sei

$$a_n = \frac{1}{n^2},\quad b_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)},\quad c_n = \frac{1}{n+1},\quad d_n = \frac{1}{n+2}.$$

Weiters sei

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,\quad C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,\quad D = \sum_{n=1}^{\infty} d_n\ .$$

(a) Berechnen Sie die Partialsummen von B.

(b) Berechnen Sie den Wert von B.

(c) Begründen Sie $a_n \le 6b_n$ für $n \ge 1$. Konvergiert A?

(d) Warum ist $B = C - D$ falsch, obwohl $b_n = c_n - d_n$?

16. Man leite die Funktionalgleichung $e^x\, e^y = e^{x+y}$ für die Exponentialfunktion aus deren Potenzreihendarstellung durch Bildung des Cauchyprodukts der entsprechenden Potenzreihen her.

17. Man skizziere die Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = \cos x,\ \ f_2(x) = 1/\cos x,\ \ f_3(x) = \cos^2 x,\ \ f_4(x) = |\cos x|,\ \ f_5(x) = \sqrt{|\cos x|}$$

im Intervall $[0,\pi]$ und untersuche alle Funktionen auf Stetigkeit.

18. Die Abbildungen sinh, cosh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),\quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Man skiziere die Graphen der beiden Funktionen und ihrer Umkehrfunktionen (wo sind diese überhaupt definiert?), und bestimme die Potenzreihenentwicklung von sinh(x) und cosh(x) an der Stelle $x_0 = 0$.

19. Man berechne folgende Grenzwerte (ohne Verwendung der Regel von de l'Hospital):

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{17x^2+4x-1}{x^3-12x^2+1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

20. Man zeige mit Hilfe des Nullstellensatzes, dass die Funktion $y = e^{x/2} - 4x + 1$ im Intervall $[0,1]$ sowie im Intervall $[6,7]$ je eine Nullstelle besitzt. Ferner berechne man diese Nullstellen näherungsweise mit Hilfe des Newton'schen Näherungsverfahrenes.

21. Man bestimme die Lösungsfolge der beim „Babylonischen Wurzelziehen" auftretenden Iteration

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 0,1,2,...$$

(wobei $a > 0$, $x_0 > 0$ ist) auf graphischem Weg und zeige, dass stets

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ... \geq \sqrt{a}$$

gilt, d.h., die Iterationsfolge (x_n) ist ab $n = 1$ monoton fallend und nach unten durch $\sqrt{a}$ beschränkt.

2 Differential- und Integralrechnung in einer Variablen

22. – 23. Man untersuche, wo die Funktion $f(x)$ differenzierbar ist und bestimme dort ihre Ableitung $f'(x)$.

22. $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$

23. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

Ist diese Funktion stetig differenzierbar?

24. Man berechne die Ableitungen von $\arcsin(x)$ und $\arccos(x)$ mit Hilfe der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion.

25. Man berechne die ersten 4 Ableitungen der Funktion $f(x) = (x + 1)/(x - 1)$. Können Sie allgemein einen Ausdruck für die n-te Ableitung angeben?

26. Man beweise die Leibniz'sche Produktregel

$$\left(f(x)g(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \quad \text{für } n \geq 1$$

mit vollständiger Induktion und bestimme damit $f^{(8)}(x)$ für $f(x) = x^2e^{-2x}$.

27. Man zeige mittels Differenzieren, dass

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)+\frac{1}{2}\arcsin x=\frac{\pi}{4} \quad \text{für } |x|<1.$$

28. Man berechne die Grenzwerte nachstehender unbestimmter Formen:

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4}{e^{4x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1/2}(1-2x)\tan\pi x$

29. Für die unbestimmten Formen (a) ∞^0 sowie (b) 1^∞ gebe man je zwei Beispiele mit unterschiedlichen Grenzwerten an.

(Hinweis: Finden Sie im Fall (a) Funktionen $f_i(x)$ und $g_i(x)$ für $i = 1,2$, so dass $\lim f_1(x) = \lim f_2(x) = \infty$, $\lim g_1(x) = \lim g_2(x) = 0$, aber $\lim f_1(x)^{g_1(x)} \neq \lim f_2(x)^{g_2(x)}$ gilt.)

30. Man zeige, dass der Logarithmus $\ln x$ für $x \to \infty$ schwächer wächst als jede positive Potenz x^α von x $(\alpha > 0)$.

31. Man leite die unendlichen Reihen für $\sin(x)$ und $\cos(x)$ durch Entwicklung der beiden Funktionen in eine Taylorreihe mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ her.

32. Man approximiere die Funktion $f(x) = 8(x + 1)^{3/2}$ durch eine lineare bzw. eine quadratische Polynomfunktion im Punkt $x_0 = 0$.

33. Man entwickle die Funktion $f(x)=e^{(e^x)}$ im Punkt $x_0 = 2$ in eine Potenzreihe und gebe das Restglied R_n nach Lagrange an. Wie groß ist der Fehler $R_3(x)$, falls man diese Reihe nach dem vierten Glied abbricht? Man schätze diesen Fehler für die Werte $x = 1{,}9$ und $x = 2{,}1$ ab.

34. Wie ist t $(t \neq 1)$ zu wählen, damit die Funktion $f(x) = (x^2 + t)/(x - t)$ in einer Umgebung der Stelle $x_0 = 1$ streng monoton fallend ist? Machen Sie eine Skizze.

35. Man diskutiere die Funktion $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ im Intervall $I = [-\pi, \pi]$ (Monotonie, relative Extrema, Wendepunkte und Konvexität).

36. Man bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f:[a,b]\to\mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x)=\sqrt{(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2}\ ,$$

wobei $a < c < b$ gelte.

37. – 38. Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

37. (a) $\displaystyle\int \frac{12x^7 + 5x - \sqrt{x^3}}{x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int (x^2 + x + 1)\ln x\,dx$

38. (a) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \sin x\,(1+2\cos x)^4\,dx$

39. Mit Hilfe der Substitutionsregel beweise man die nachstehende Integrationsregel

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + C$$

und berechne damit $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$.

40. Wie lauten die Partialbruchzerlegungen für nachstehende rationale Funktionen?

(a) $f(x) = \dfrac{2x+7}{x^2-3x-4}$ (b) $g(x) = \dfrac{5-x}{(x-2)^2}$ (c) $h(x) = \dfrac{4x^2+x+5}{x^3+5x}$

41. Man berechne das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$.

42. Man berechne die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$

43. Wird der Wechselstroms $i(t) = i_0 \sin(t)$ gleichgerichtet, so ergibt sich ein pulsierender Gleichstrom der Form

(a) $i_1(t) = \begin{cases} i_0 \sin t & 0 \le t \le \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$ beim Einweggleichrichter bzw.

(b) $i_2(t) = |i_0 \sin t|,\ 0 \le t < 2\pi$ beim Doppelgleichrichter.

Man ermittle den Gleichrichtwert des Wechselstromgleichrichters, d. i. der Mittelwert der Stromstärke $i_1(t)$ bzw. $i_2(t)$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ (Skizze).

44. Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ (b) $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$

45. Man berechne $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$.

(Anleitung: Zum Integrieren wähle man die Substitution u = $\sqrt{x-1}$. Ferner beachte man, dass das angegebene Integral sowohl bei x = 1 als auch bei x = ∞ uneigentlich ist.)

46. Mit Hilfe des Integralkriteriums zeige man, dass die so genannte hyperharmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ für $\alpha > 1$ konvergent, für $\alpha \leq 1$ hingegen divergent ist.

3 Grundlagen Differential- und Integralrechnung in mehreren Variablen

47. Man stelle den Definitionsbereich und Wertebereich folgender Funktionen fest und beschreibe die Höhenlinien:

(a) $z = x^2 - y^2$ (b) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{16}}$

48. Eine Funktion $f(x_1,...,x_n)$ heißt homogen vom Grad r, falls für jedes feste $\lambda > 0$ und alle $(x_1,...,x_n)$ aus einem geeigneten Definitionsbereich gilt

$$f(\lambda x_1,...,\lambda x_n) = \lambda^r f(x_1,...,x_n).$$

Man prüfe nach, ob die Funktionen

(a) $f(x,y,z) = x + (yz)^{1/2}$ (für $x,y,z \geq 0$),

(b) $f(x,y) = x^2 + y$,

(c) $f(x,y) = ax^b y^c$ (mit $a,b,c \in \mathbb{R}$, $x,y > 0$) homogen sind.

49. (a) Für die Funktion $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ berechne man die partiellen Ableitungen f_x, f_y und die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x_0,y_0) = (0.2, 0.3)$.

(b) Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktion $f(x,y) = x^2 \sin y + \cos(x + 2y)$.

50. Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Man zeige, dass im Ursprung (0,0) zwar die partiellen Ableitungen f_x und f_y existieren, die Funktion dort aber nicht stetig ist.

51. Das elektrostatische Potential einer Punktladung Q im Koordinatenursprung ist durch

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

gegeben, für das Potential eines Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{p} = (p,0,0)$ gilt

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

(Dabei sind Q, p und ε_0 Konstante.) In beiden Fällen berechne man das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}$ nach der Formel $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$.

52. Durch $z = xy/(x + y)$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Beschränkung von x und y auf die Werte $x = e^t$ und $y = e^{-t}$ ($t \in \mathbb{R}$) liefert eine Kurve auf dieser Fläche. Man bestimme dz/dt mittels Kettenregel und mache die Probe, indem man zuerst x und y in z einsetzt und anschließend nach dem Parameter t differenziert. Wo verläuft diese Kurve auf der Fläche horizontal?

53. Mit Hilfe der Kettenregel berechne man den Wert der partiellen Ableitung der Funktion $F(x,y) = f(g(x,y),h(x,y))$ nach y an der Stelle (0,0), wobei $f(g,h) = g^2 + h^2$, $g(x,y) = \cos x + \sin y$ und $h(x,y) = x + y + 1$ ist.

54. Man bestimme dy/dx für folgende implizit gegebene Kurven:

    (a) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ für $x_0 = 0{,}5$

    (b) $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ für $x_0 = 1$

55. Man berechne die Ableitung von $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ im Punkt $P_0(3,2)$

    (a) in Richtung der Koordinatenachsen,

    (b) in Richtung von (–1,–1) sowie

    (c) in Richtung von grad f.

56. In welcher Richtung erfolgt die maximale Änderung von

$$f(x,y,z) = x^2 \sin(yz) - y^2 \cos(yz)$$

vom Punkt $P_0(4,\pi/4,2)$ aus und wie groß ist sie annähernd?

57. Man bestimme die lineare und die quadratische Approximation der Funktion

$$f(x,y) = x^2(y-1) + xe^{y^2}$$

im Entwicklungspunkt (–1,0).

58. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = 4(x - 2)(y^2 + 10y) + 3x^3$.

59. Gesucht ist das absolute Maximum der Funktion $f(x,y) = xy(3 - x - y)$ auf dem Definitionsbereich $D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, y \leq 3 - x\}$.

(Anleitung: Man skizziere den Definitionsbereich D in der (x,y)-Ebene, bestimme dessen Rand und ermittle alle Funktionswerte auf dem Rand. Das absolute Maximum ist dann unter den relativen Maxima im Inneren sowie unter den Funktionswerten am Rand von D zu suchen.)

60. Man berechne das Bereichsintegral $\iint_B (xy + x^2 - y^2)\,dxdy$ über dem Rechtecksbreich, welcher durch die Eckpunkte A(−1,1), B(5,1), C(5,5) und D(−1,5) bestimmt ist.

4 Elementare Differentialgleichungen

61. Durch Einsetzen bestätige man, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6y = 12\ln x$$

durch

$$y(x) = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \frac{1}{3},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = 2/3$, $y'(1) = -1$?

62. Man zeige, dass jede Funktion $z(x,y) = \frac{1}{a}x + C(y - \frac{b}{a}x)$, wo C = C(u) eine willkürlich gewählte, differenzierbare Funktion in einer Variablen ist, Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

(mit $a \neq 0$) ist. Wie lautet die Lösung zur Anfangsbedingung $z(x = 0, y) = y^2 + 1$?

63. Vom neuesten Modell eines Mobiltelefonproduzenten werden im Weihnachtsgeschäft 8000 Stück abgesetzt, nach 10 Monaten sind davon nur mehr 7680 Stück in Betrieb. Unter der Annahme, dass die monatliche Ausscheiderate proportional zur Nutzungsdauer ist, bestimme man die Anzahl y(t) der in Betrieb stehenden Mobiltelefone (von den ursprünglich 8000 Stück) in Abhängigkeit von ihrer Verwendungsdauer t, sowie die längste Nutzungsdauer.

Achtung: Diese Aufgaben decken den Lehrstoff der letzten Vorlesungswoche ab und dienen nur zur Vorbereitung auf die Vorlesungsprüfung.

64. Man löse die homogene lineare Differentialgleichung $y' - y\tan x = 0$.

65. Man löse die inhomogene lineare Differentialgleichung $xy' + y = 6x^2 + 6x + 2$.

66. Man bestimme die partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' + y\cos x = \sin x \cos x$ zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

67. Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:
    (a) $y'' - 8y' - 9y = 0$
    (b) $y'' + 8y' + 16y = 0$
    (c) $y'' - 8y' + 25y = 0$

68. Man bestimme die partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2y' + 2y = 0$ zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

69. Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - y' - 2y = x$.