ADM, 2014S

Übungsaufgaben zur Algebra und Diskreten Mathematik für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Blatt 3

13. Man bestätige die Richtigkeit der folgenden Behauptungen:

    (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ stets durch 3 teilbar − mittels eines direkten Beweises.

    (b) Ist die Summe $m + n$ zweier Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ ungerade, dann ist genau einer der beiden Summanden ungerade − mittels eines indirekten Beweises.

    (c) Ist das Quadrat n^2 einer ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gerade, dann ist auch n gerade − mittels eines Beweises durch Kontraposition.

    (d) Die Aussage von (a) − mittels eines Beweises durch vollständige Induktion.

14. Man beweise, dass die folgenden drei Aussagen für beliebige Mengen A, B äquivalent sind:
    (i) $A \cap B = A$ (ii) $A \cup B = B$ (iii) $A \subseteq B$

15. Man beweise die folgenden Beziehungen für Mengen A, B, C mit Hilfe von Elementtabellen oder gebe ein konkretes Gegenbeispiel an:

    (a) $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$

    (b) $A \,\Delta\, (B \cap C) = (A \,\Delta\, B) \cap (A \,\Delta\, C)$

16. Sei $A = \{1, 2, ..., 8\}$ und R eine binäre Relation auf A, definiert durch

    $$a \, R \, b \iff a = b \text{ oder } ggT(a,b) = 2 \quad \forall\, a, b \in A.$$

    Man gebe explizit die Relation R sowie ihren Graphen G(R) an, und untersuche R in Hinblick auf die Eigenschaften Reflexivität (R), Symmetrie (S), Antisymmetrie (A) und Transitivität (T).

17. Man zeige, dass durch

    $$a \, R \, b \iff 6 \mid a^2 - b^2 \quad \forall\, a,b \in \mathbb{Z}$$

    eine Äquivalenzrelation R in der Menge $\mathbb{Z}$ erklärt wird, und bestimme die zugehörende Partition.

18. Man vergleiche die Hassediagramme der beiden Halbordnungen $(P(\{a,b,c\}), \subseteq)$ und $(T_{165}, \mid)$.