ADM, 2014S

Übungsaufgaben zur Algebra und Diskreten Mathematik für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Blatt 9

43. Gegeben seien die folgenden binären Operationen $\bullet$ auf der Menge A. Man untersuche die Operationen in Hinblick auf Assoziativität, Kommutativität sowie auf Existenz von neutralen oder inversen Elementen.

    (a) $A = \{-1,0,1\}$, $\bullet$ gewöhnliche Multiplikation

    (b) $A = \mathbb{N}$, $a \bullet b = 2^{ab}$

    (c) $A = \mathbb{Q}$, $a \bullet b = ab + 1$

    (d) $A = \mathbb{R}$, $a \bullet b = |a + b|$

    (e) $A \neq \emptyset$, $a \bullet b = a$

44. (a) Gegeben sind die Permutationen $\pi = (1346)$, $\rho = (134562)$ und $\sigma = (126)(35)$ der S_6. Man berechne $\pi\rho^{-1}\sigma^2$ und $\pi\rho\sigma^{-2}$.

    (b) Man schreibe die folgenden Permutationen in Zyklendarstellung bzw. als Produkt von Transpositionen und gebe deren Vorzeichen an:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 2 & 9 & 5 & 8 & 1 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

45. Man beweise die Gültigkeit der folgenden Rechenregeln in einer Gruppe $(G,\cdot)$ für beliebige $a,b,c \in G$:

    (i) $a\cdot b = a\cdot c \Rightarrow b = c$ (Kürzungsregel)

    (ii) $(a^{-1})^{-1} = a$

    (iii) $(a\cdot b)^{-1} = b^{-1}\cdot a^{-1}$

    (iv) Die Gleichung $a\cdot x = b$ ist in G stets eindeutig lösbar.

46. Sei G die Menge der Permutationen

$$\{(1), (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}.$$

    Man veranschauliche G, indem man die Permutationen auf die vier Eckpunkte eines Quadrates wirken lasse und als geometrische Operationen interpretiere. Man zeige mit Hilfe dieser Interpretation, dass G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4 ist (Symmetriegruppe des Quadrates) und bestimme alle Untergruppen.

47. In der Symmetriegruppe des Quadrats (vgl. Aufgabe 46.) bestimme man die Rechts- und Linksnebenklassenzerlegung nach einer (a) von einer Drehung, (b) von einer Spiegelung erzeugten Untergruppe.

48. Man zeige, dass die Menge $\mathbb{Z}_7 \setminus \{0\}$ der von 0 verschiedenen Restklassen modulo 7 mit der Multiplikation eine zyklische Gruppe ist (Operationstafel) und bestimme alle ihre Untergruppen.