ADM, 2014S

Übungsaufgaben zur Algebra und Diskreten Mathematik für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Blatt 10

49. Es sei $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ die Menge der so genannten ganzen Gauß'schen Zahlen. Man zeige, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein Ring (ein Unterring der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$) ist. Ist $\mathbb{Z}[i]$ auch Integritätsring? Welche Elemente in $\mathbb{Z}[i]$ sind invertierbar?

50. Man ermittle Quotient und Rest für die beiden Polynome $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x + 1$ und $g(x) = x^2 + 4$ im Polynomring $\mathbb{Z}_5[x]$.

51. Man zeichne die Hassediagramme der beiden Teilerverbände T_{56} und T_{66}. Ist einer dieser Verbände eine Boole'sche Algebra?

52. Man zeige, dass die Menge $P_3(\mathbb{Q})$ aller Polynome $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ vom Grad kleiner gleich 3 mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Q}$ einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$ bildet. Man gebe ein Beispiel für drei Polynome vom Grad 3 an, welche linear abhängig sind, sowie drei Polynome vom Grad 3, welche linear unabhängig sind. Ferner gebe man zwei verschiedene Basen von $P_3(\mathbb{Q})$ an.

53. Man zeige allgemein, dass jede quadratische Matrix A als Summe einer symmetrischen Matrix B (mit $B = B^T$) und einer schiefsymmetrischen Matrix C (mit $C = -C^T$) geschrieben werden kann. (Hinweis: Man wähle $B = (1/2)(A + A^T)$.) Wie sieht diese Zerlegung konkret für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

aus?

54. Man bestimme den Rang der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$