ADM, 2014S

Übungsaufgaben zur Algebra und Diskreten Mathematik für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Blatt 12

58. Man finde alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +5x_4 & = & 3 \\ -x_1 & +4x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +4x_2 & & +x_4 & = & 1 \end{array}$$

59. Man bestimme alle Lösungen des nachstehenden Gleichungssystems (a) einmal über dem Körper $\mathbb{R}$ und (b) einmal über dem Körper $\mathbb{Z}_3$.

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & & +x_3 & -2x_4 & = & 1 \\ 7x_1 & & +x_3 & +x_4 & = & 7 \end{array}$$

60. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass A nichtsingulär ist und berechne A^{-1}. Schließlich ermittle man AA^{-1} sowie $A^{-1}A$.

61. Man berechne die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 10 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & -2 & -8 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 8 & 12 \end{vmatrix}.$$

62. Man bestimme sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

63. Im $\mathbb{R}^3$ sei ein verallgemeinertes Skalarprodukt gegen durch $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \cdot G \cdot \vec{y}$ mit der Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -5 \\ 0 & 9 & -6 \\ -5 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Für die Vektoren $\vec{x} = (1,2,3)^T$ und $\vec{y} = (3,-1,2)^T$ berechne man (a) die Längen von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sowie (b) den Winkel φ zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$. (c) Ferner gebe man einen zu $\vec{x}$ orthogonalen Vektor an.