Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 5. Februar 2013 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Sei Γ die Einheitengruppe von $(\mathbb{Z}_{15}, +, \cdot)$, also die Menge aller Restklassen $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{15}$ mit $\mathrm{ggT}(a, 15) = 1$. Bestimmen Sie Γ, die von $\overline{4}$ erzeugte Untergruppe U von Γ sowie die Faktorgruppe Γ/U (durch Angabe der Menge und der Operationstafel).

2)(8 P.) Berechnen Sie $\det(A^3)$ und untersuchen Sie, ob A^4 invertierbar ist. Dabei sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 10 \\ 4 & 10 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

3)(8 P.) Wieviele verschiedene Permutationen der Buchstaben des Worts MATHEMATIK gibt es? Wieviele dieser Permutationen beginnen mit M? In wievielen dieser Permutationen (der ersten Frage!) sind die beiden A nebeneinander? Alle Antworten müssen auch begründet werden.

4)(8 P.) Was versteht man unter dem kartesischen Produkt zweier Mengen? Nennen Sie zwei verschiedene Elemente des kartesichen Produkts von $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{R}^2$? Was versteht man unter einer binären Relation auf einer Menge? Geben Sie je ein Beispiel für die folgenden Relationen: (i) symmetrische Relation auf $\mathbb{Z}_5$, (ii) nicht symmetrische Relation auf $\mathbb{Z}_5$, (iii) antisymmetrische Relation auf $\mathbb{N}$.

5)(8 P.) Seien $(G, \circ)$ und $(H, \heartsuit)$ zwei Gruppen. Wie ist ein Homomorphismus von G nach H definiert? Wann werden $(G, \circ)$ und $(H, \heartsuit)$ isomorph genannt? Nennen Sie zwei verschiedene, aber isomorphe Untergruppen U_1 und U_2 der symmetrischen Gruppe S_3 und geben Sie einen Isomorphismus zwischen U_1 und U_2 konkret an.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 1. März 2013 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)
2)
3)
4)
5)

1)(8 P.) Berechnen Sie die Anzahl derjenigen 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$, die höchstens 2 Elemente der Menge $\{1, 2, 3\}$ und genau 3 Elemente der Menge $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ enthalten.

(Begründen Sie Ihre Antwort so, dass der Rechenweg nachvollziehbar ist!)

2)(8 P.) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursion $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

3)(8 P.) Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 4 \end{aligned}$$

4)(8 P.) Was ist ein bewerteter Graph? Wozu dient der Disktra-Algorithmus? Welche Voraussetzung muss ein bewerteter Graph erfüllen, damit der Disktra-Algorithmus korrekt ist? Geben Sie ein Beispiel eines bewerteten Graphen an, wo diese Voraussetzung verletzt ist und der Algorithmus ein falsches Resultat liefert.

5)(8 P.) Gegeben ist die ISBN 3-211-82748-X. Wo steht dabei die Prüfziffer, welche Funktion hat sie und wie wird sie berechnet? Beweisen Sie, dass beim ISBN-Code sowohl Einzelfehler als auch beliebige Vertauschungsfehler erkannt werden.

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK
F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 3. Mai 2013 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Untersuchen Sie, ob die Menge

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right) \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Matrizenaddition und -multiplikation einen Körper bildet. Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, daß die Menge *aller* reellen 2x2-Matrizen mit der Matrizenaddition und -multiplikation ein Ring ist.

2)(8 P.) a) Beschreiben Sie die Methode der vollständigen Induktion!

b) Illustrieren Sie diese Methode anhand eines Beweises für die Identität

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3, \qquad n \geq 1.$$

3)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis des Bildraums $f(\mathbb{R}^4)$.

4)(8 P.) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, wobei $c > 0$. Welche Beziehung zwischen a, b und c wird durch die Formel $a \equiv b \mod c$ beschrieben? Was versteht man unter einer Restklasse modulo c? Geben Sie eine dieser Restklassen konkret an! Seien $\bar{x}$ und $\bar{y}$ Resklassen modulo c. Wie ist das Produkt $\bar{x} \cdot \bar{y}$ definiert? Beschreiben Sie die Menge all jener Restklassen, die bezüglich des Produkts invertierbar sind.

5)(8 P.) Was versteht man unter einem Eigenwert, was unter einem Eigenvektor einer quadratischen Matrix A? Geben Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte und zu jedem Eigenwert je zwei verschiedene Eigenvektoren an.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK
F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 28. Juni 2013 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Gegeben seien 8 Bücher in englischer, 7 Bücher in französischer und 10 Bücher in deutscher Sprache. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Bücher so auszuwählen, daß jede der drei Sprachen vertreten ist?

2)(8 P.) Wie ist die Inverse einer Matrix A definiert? Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3)(8 P.) a) Beschreiben Sie die Methode der vollständigen Induktion!

b) Illustrieren Sie diese Methode anhand eines Beweises für die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \qquad n \geq 0.$$

4)(8 P.) Definieren Sie, was $a|b$ (a teilt b) und was $d = \text{ggT}(a, b)$ (d ist größter gemeinsamer Teiler von a und b) für ganze Zahlen a, b, d bedeutet. Berechnen Sie $\text{ggT}(1198009, 565679)$ mit dem Euklidischen Algorithmus. Begründen Sie allgemein oder anhand der eben durchgeführten Rechnungen, warum der Euklidische Algorithmus wirklich den ggT der beiden Ausgangszahlen liefert. Finden Sie einen Teiler von 565679, der nicht Teiler von 1198009 ist. (Begründung!)

5)(8 P.) Gegeben sei eine Menge $M = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ von Vektoren eines Vektorraums V. Definieren Sie, was die folgenden Aussagen bzw. Begriffe bedeuten:
(a) M ist linear unabhängig. (b) M ist eine Basis von V. (c) Die Dimension von V ist 7. (d) Lineare Hülle von M.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK
F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 4. Oktober 2013 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f.

2)(8 P.) Gegeben sei die Menge $M = \{2, .., 6\}$ und zwei Relationen R und S auf M, definiert durch

$$xRy :\Longleftrightarrow 2x - 3 \mid 2y - 3, \qquad xSy :\Longleftrightarrow 2x - 2 \mid 3y - 3.$$

Untersuchen Sie, welche dieser Relationen eine Halbordnung oder sogar Totalordnung ist? Falls eine Halbordnung vorliegt, geben Sie auch das zugehörige Hassediagramm an!

3)(8 P.) Wieviele Möglichkeiten gibt es k natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ auszuwählen, sodass

a) $1 \leq a_1, a_2, \ldots, a_k \leq n$

b) $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$

c) $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n$

gilt? Alle antworten müssen begründet werden! (In ganzen Sätzen, nicht in Stichworten!)

4)(8 P.) Sei $\circ$ eine zweistellige Operation auf der Menge A. Geben Sie exakte Definitionen für die folgenden Eigenschaften für $(A, \circ)$ an:

(1) Assoziativgesetz
(2) Existenz eines neutralen Elements
(3) Existenz von inversen Elementen

Geben Sie weiters je ein Beispiel einer Struktur $(A, \circ)$ an, die

a) nur (1),
b) (1) und (2), aber nicht (3),
c) alle drei Eigenschaften besitzt.

5)(8 P.) Gelten folgende Formeln? Geben Sie jeweils eine verbale Begründung. (In ganzen Sätzen, nicht in Stichworten!)

(1) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} : \ x < y$

(2) $\exists y \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{N} : \ x < y$

(3) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} : \ y < x$

(4) $\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z} : \ y < x$