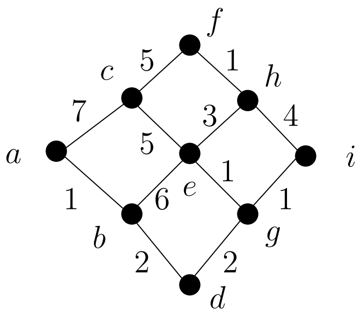
1) Man bestimme mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus einen kürzesten Weg von a nach h:



Lösung:

Beim Dijkstra-Algorithmus wird in jedem Schritt von den noch unmarkierten Knoten jener mit geringster vorläufiger Entfernung zum Knoten a ausgewählt und markiert. In der folgenden Tabelle werden die vorläufigen Entfernungen für alle unmarkierten Knoten, der ausgewählte Knoten x und sein Vorgänger V aufgelistet. Der Eintrag – bedeutet, daß noch keine vorläufigen Entfernungen festgesetzt wurden, während bei bereits markierten Knoten kein Eintrag steht.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	x	V
0	–	–	–	–	–	–	–	–	a	–
	1	7	–	–	–	–	–	–	b	a
		7	3	7	–	–	–	–	d	b
		7		7	–	5	–	–	g	d
		7		6	–		–	6	e oder i, z.B. e	g
		7			–		9	6	i	g
		7			–		9		c	a
					12		9		h	e

Nun ist der Knoten h markiert und der kürzeste Weg $a \to b \to d \to g \to e \to h$

2) Man bestimme alle Lösungen des Systems

$$\begin{aligned}
x + y + 2z - 2u &= 2 \\
x - y - z - u &= -2 \\
7x + 3y + 8z - 12u &= 6 \\
5x + 3y + 7z - 9u &= 6
\end{aligned}$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

Lösung:

Ansatz der erweiterten Systemmatrix und Lösung mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{rrrr|rl}
1 & 1 & 2 & -2 & 2 & \\
1 & -1 & -1 & -1 & -2 & \quad -Z_1 \\
7 & 3 & 8 & -12 & 6 & \quad -7Z_1 \\
5 & 3 & 7 & -9 & 6 & \quad -5Z_1 \\
\hline\hline
1 & 1 & 2 & -2 & 2 & \\
0 & -2 & -3 & 1 & -4 & \\
0 & -4 & -6 & 2 & -8 & \quad -2Z_2 \\
0 & -2 & -3 & 1 & -4 & \quad -Z_2 \\
\hline\hline
1 & 1 & 2 & -2 & 2 & \\
0 & -2 & -3 & 1 & -4 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Der Rang der Matrix ist 2 und die letzten beiden Zeilen bestehen nur aus Nullen. Daher ist das Gleichungssystem lösbar und die Lösung ist ein 2-dimensionaler Nebenraum des $\mathbb{R}^4$. Wir setzen daher $z = \lambda$ und $u = \mu$ und erhalten

$$y = 2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu, \qquad x = -\frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2}\mu.$$

Die Lösungen des Systems sind daher aller Vektoren der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) Man bestimme die kleinste Untergruppe von $(\mathbf{Z}, +)$, die die Zahlen 78 und –51 enthält.

Lösung:

Die gesuchte Untergruppe bezeichnen wir mit U. Da der Durchschnitt von Untergruppen wieder eine Untergruppe ist, ist U gleich dem Durschnitt aller Untergruppen, die –51 und 78 enthalten. Daraus folgt: Ist W eine Untergruppe, die –51 und 78 enthält, dann gilt $W \subseteq U$.

Der euklidische Algorithmus liefert

$$\begin{aligned}
78 &= 51 \cdot 1 + 27 \\
51 &= 27 \cdot 1 + 24 \\
27 &= 24 \cdot 1 + 3 \\
24 &= 3 \cdot 8 + 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\mathrm{ggT}(-51, 78) = 3$ und außerdem kann durch sukzessives Einsetzen in die obigen Gleichungen in umgekehrter Reihenfolge 3 durch –51 und 78 dargestellt werden: D.h. es gibt ganze Zahlen a und b mit

$$a \cdot 78 + b \cdot (-51) = 3.$$

Daraus folgt $3 \in U$ und wegen der Abgeschlossenheit auch

$$3\mathbf{Z} \subseteq U. \tag{1}$$

Die Menge $3\mathbf{Z}$ ist aber eine Untergruppe von $(\mathbf{Z}, +)$, die 78 und –51 enthält. Da U die kleinste derartige Untergruppe ist, muß nach den Überlegungen im ersten Absatz

$$U \subseteq 3\mathbf{Z} \tag{2}$$

gelten. Aus (1) und (2) folgt nun $U = 3\mathbf{Z}$.

4) Wie lassen sich jene Graphen charakterisieren, die Bäume sind? Geben Sie mindestens zwei Charakterisierungen an und begründen Sie deren Äquivalenz.

Was versteht man unter einem bewerteten Graph? Wie sind die Begriffe spannender Baum und minimaler spannender Baum definiert? Beschreiben Sie den Kruskalalgorithmus zur Bestimmung eines minimalen spannenden Baumes.

Lösung:

Bäume könnnen zum Beispiel durch folgende Eigenschaften charakterisiert werden:

(1) kreisfrei und zusammenhängend
(2) kreisfrei und maximal bzgl. der Inklusion auf der Kantenmenge

Die Äquivalenz dieser beiden lässt sich wie folgt sehen:

(1)$\Longrightarrow$(2): Gibt man in einem kreisfreien, zusammenhängenden Graphen eine Kante (x, y) dazu, so entsteht ein Kreis, da ja x und y bereits vorher durch einen Weg miteinander verbunden waren.

(2)$\Longrightarrow$(1): Ist G ein maximaler kreisfreier Graph, so muß er auch zusammenhängend sein. Andernfalls könnte man zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten durch eine Kante verbinden, ohne daß ein Kreis entstünde, was der Maximalität entspricht.

Ein bewerteter Graph ist ein Graph, dessen Kanten Gewichte (reelle Zahlen) zugeordnet sind.

Ein spannender Baum von G ist ein Teilgraph von G, der dieselbe Knotenmenge wie G hat und ein Baum ist.

Ein minimaler spannender Baum ist ein spannender Baum eines bewerteten Graphen, bei dem die Summe aller Kantengewichte minimal ist.

Der Kruskalalgorithmus konstruiert einen spannenden Baum T für einen Graphen $G = (V, E)$.

(1) Ordne die Kanten nach aufsteigendem Gewicht: $e_1, \ldots, e_m$ und setze $T = (V, \{e_1\})$.
(2) Falls von den noch nicht verbrauchten Kanten jene mit minimalem Gewicht zusammen mit T einen Kreis ergibt, verwirf sie. Andernfalls gib sie zu T hinzu.
(3) Falls T bereits $|V| - 1$ Kanten hat, ENDE. Sonst gehe zu (2).

5) Was ist eine Reihe reeller Zahlen? Wie ist der Grenzwert einer solchen Reihe definiert? Wann heißt sie konvergent, wann absolut konvergent? Illustrieren Sie den Unterschied dieser beiden Begriffe anhand eines Beispiels.

Was versteht man unter einer Potenzreihe? Wie sieht das Konvergenzgebiet einer Potenzreihe in $\mathbb{C}$ aus und wie läßt sich dessen Größe quantifizieren?

Lösung:

Eine Reihe reeller Zahlen ist eine Summe der Form $\sum_{n\geq 0} a_n$. Der Grenzwert a der Reihe ist definiert als Grenzwert ihrer Partialsummenfolge:

$$a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Die Reihe heißt konvergent, wenn dieser Grenzwert existiert, und absolut konvergent, wenn

$$\sum_{n\geq 0} |a_n|$$

konvergent ist.

Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent, aber nicht umgekehrt, denn

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$$

ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n.$$

Das Konvergenzgebiet ist ein Kreis mit Mittelpunkt x_0, dessen Größe durch den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

bestimmt ist.