ANA2, 2013S

Übungsaufgaben zur Analysis 2 für Informatik

Blatt 1

1. Gegeben sei die Polynomfunktion $z = f(x,y) = xy^2 - 10x$. Man bestimme die Gleichungen ihrer Schnittkurven mit den senkrechten Ebenen $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ sowie die Höhenlinien für $z = z_0$ und skizziere alle drei Kurvenscharen. Mittels eines Computeralgebrasystems ermittle man eine 3D-Darstellung der gegebenen Funktion.

2. Gegeben sei die quadratische Form

$$q(\vec{x}) = q(x,y,z) = 75x^2 + 7y^2 + 2bxz + 12z^2 \quad \text{mit } b \in \mathbb{R}.$$

Wie lautet die zugehörige symmetrische Matrix A, so dass $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$? Für welche Werte von b ist die Form positiv definit?

3. Man gebe eine Parametrisierung für die Mantelfläche eines Drehzylinders mit dem Radius R und der z-Achse als Rotationsachse an. Für welche Parameterwerte erhält man den Punkt $P\left(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$ auf der Zylinderoberfläche?

Gesucht sind ferner die Parameterdarstellungen für folgende drei Kurven durch den Punkt P auf der Mantelfläche: (a) eine Meridianlinie (d.h. Parallele zur Zylinderachse), (b) einen Breitenkreis und (c) eine Schraubenlinie mit der Ganghöhe π.

4. Zeigen Sie, dass die Funktion $\vec{x}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gemäß

$$\vec{x}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x(\theta,\varphi) \\ y(\theta,\varphi) \\ z(\theta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

als Parametrisierung der Oberfläche eines Torus angesehen werden kann. Erklären Sie diese Darstellung anhand einer geeigneten Skizze. Wie lautet die Jakobi-Matrix dieser Funktion?

5. Gegeben sei die parametrisierte Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$

für $0 \le t \le 2\pi$ (Lissajous-Figur). Man skizziere die Kurve $\vec{x}(t)$. Ferner berechne man mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ sowie $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $y = y(x)$. In welchen Punkten hat die Kurve waagrechte bzw. senkrechte Tangenten? Können Sie auch die Wendepunkte dieser Kurve bestimmen? (Verwenden Sie dabei ein Computeralgebrasystem oder WolframAlpha.)

6. Man berechne alle Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie die Jacobi-Matrix für die folgenden Funktionen:

(a) $f(x,y,z) = x^2 \sin(yz) + e^{x+y+z}$ (b) $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \sin t \\ e^{3t} \\ \dfrac{1}{1+t^2} \end{pmatrix}$ (c) $\vec{h}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \sin y \\ e^{x+2y} \end{pmatrix}$