ANA2, 2013S

Übungsaufgaben zur Analysis 2 für Informatik

Blatt 4

19. Man berechne das Kurvenintegral über das Vektorfeld

$$\vec{f}(x,y)=\begin{pmatrix} x^2y \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

(a) längs der beiden achsenparallelen Wege (0,0) → (0,2) → (3,2) und (0,0) → (3,0) → (3,2) sowie (b) entlang der Parabel $3y^2 = 4x$ von (0,0) nach (3,2).

20. Man untersuche, ob das Kurvenintegral

$$\int_c (2xy+\arctan y+\cos x)dx+(x^2+\frac{x}{1+y^2})dy$$

wegunabhängig ist und bestimme gegebenenfalls eine Stammfunktion. Welchen Wert hat das Integral über einen Weg c von (0,0) nach (π,1)?

21. Man zeige, dass das Kurvenintegral

$$\int_c \left(\cos x dx + e^{-y}dy + z^2dz\right)$$

wegunabhängig ist, und berechne dieses Integral über einen Weg von (–1,3,4) nach (6,9,–2).

22. Unter Zuhilfenahme der Moivre'schen Formel finde man eine Darstellung für die Funktionen

$$\cos^2 t,\ \sin^2 t,\ \cos^3 t,\ \sin^3 t\ \cos^4 t,\ \sin^4 t$$

als trigonometrische Polynome der Periode 2π.

23. Man zeige, dass die Exponentialfunktionen $\{e^{ikt} \mid k\in\mathbb{Z}\}$ ein Orthogonalsystem im $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexwertigen 2π-periodischen stückweise stetigen Funktionen bilden, d.h.

$$\left\langle e^{ikt},e^{ilt}\right\rangle=\int_0^{2\pi} e^{ikt}\,\overline{e^{ilt}}\;dt=\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\;dt=\begin{cases}0 & k\neq l\\ 2\pi & k=l\end{cases}$$

und leite daraus die Orthogonalität von cos(mt) und sin(nt) für alle m,n ∈ ℕ her, d.h.

$$\left\langle \cos mt,\sin nt\right\rangle=\int_0^{2\pi}\cos mt\sin nt\;dt=0\,.$$

24. Man zeige: Ist eine 2π-periodische Funktion f(t) gerade, d.h. f(–t) = f(t), dann sind alle Fourierkoeffizienten $b_n = 0$ ($n \geq 1$). Ist f(t) hingegen ungerade, d.h. f(–t) = –f(t), dann sind alle Koeffizienten $a_n = 0$ ($n \geq 0$).