ANA2, 2013S

Übungsaufgaben zur Analysis 2 für Informatik

Blatt 5

25. Man zeige: Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten a_n, b_n bzw. c_k einer 2π-periodischen Funktion kann an Stelle des Intervalls $[0, 2\pi]$ auch jedes Intervall der Form $[a, a + 2\pi]$ mit $a \in \mathbb{R}$ als Integrationsintervall gewählt werden.

26. Man bestimme die reelle und die komplexe Fourierreihe der 2π-periodischen Cosinus-impuls-Funktion

$$f(t) = \max\{\cos t, 0\} = \frac{1}{2}\left(\cos t + |\cos t|\right).$$

27. Mit Hilfe des Resultats der vorhergehenden Aufgabe sowie geeigneter Rechenregeln für Fourierreihen bestimme man die Fourierentwicklung für den gleichgerichteten Cosinus $|\cos t|$ und für den gleichgerichteten Sinus $|\sin t|$ jeweils in Sinus-Cosinus-Form und in Exponentialform.

28. Die Funktion $f(t) = 1 - t$ für $0 < t < 1$ soll auf dem Intervall $(-1, +1)$ zu einer (a) geraden bzw. (b) ungeraden Funktion erweitert und außerhalb dieses Intervalls mit der Periodenlänge 2 periodisch fortgesetzt werden. Man ermittle die beiden komplexen Fourierreihen.

29. Wie lautet die reelle Fourierreihe der Funktion $f(t) = t^2/\pi^2$ für $-\pi \le t \le \pi$ und $f(t + 2\pi) = f(t)$. Können Sie aus dieser Darstellung die Gültigkeit nachstehender Formeln ableiten?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

30. Im Vektorraum V der komplexwertigen 2π-periodischen stückweise stetigen Funktionen gebe man ein geeignetes Skalarprodukt $\langle f, g\rangle$ an, so dass die Exponentialfunktionen

$$\{u_k(t) = e^{ikt} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

ein Orthonormalsystem in V bilden (vgl. Aufgabe 23). Aus der allgemeinen Besselschen Ungleichung

$$\sum_k \left|\langle f, u_k\rangle\right|^2 \le \|f\|^2$$

leite man dann die Besselsche Ungleichung für komplexe Fourierreihen her.