ANA2, 2013S

Übungsaufgaben zur Analysis 2 für Informatik

Blatt 6

31. Man gebe explizit die Fourier-Matrix F_4 und deren Inverse F_4^{-1} zur Diskreten Fourier-Transformation mit N = 4 an. Insbesondere führe man damit für den Vektor

$$\vec{f} = (10, 2, 4, 16)^T$$

die DFT und anschließend die iDFT durch.

32. Wie verläuft die Multiplikation der Polynome p(x) = 4 − 4x und q(x) = 6 + 2x mit Hilfe der Diskreten Fourier-Transformation?
(Anleitung: Man repräsentiere p(x) und q(x) durch Vektoren in $\mathbb{C}^4$ und berechne deren Faltung mittels Diskreter Fourier-Transformation mit N = 4.)

33. Im Vektorraum V = $\mathbb{C}^N$ gebe man ein geeignetes Skalarprodukt $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle$ an, so dass die N Vektoren

$$\left\{ \vec{u}_k = \left(e^{\frac{2\pi i}{N}kj}, j = 0, ..., N-1 \right), k = 0, ..., N-1 \right\}$$

eine Orthonormalbasis in V bilden. Aus der allgemeinen Parseval'schen Gleichung

$$\sum_k \left| \langle f, u_k \rangle \right|^2 = \|f\|^2$$

leite man dann die Parseval'sche Gleichung für die DFT her.

34. Man berechne die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ für den Abklingvorgang (einseitig abfallender Impuls)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\delta t} & t \geq 0 \end{cases}.$$

Man zeige, dass $\hat{f}(\omega)$ (als Kurve mit dem Parameter $\omega \geq 0$) einen Halbkreis in der komplexen Ebene um den Mittelpunkt $1/(2\delta)$ mit Radius $1/(2\delta)$ beschreibt.

35. Man berechne die Spektralfunktion $\hat{f}(\omega)$ für den Dreiecksimpuls

$$f(t) = \begin{cases} C(1 + \frac{t}{T}) & -T < t < 0 \\ C(1 - \frac{t}{T}) & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

36. Für die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ beweise man folgende Rechenregeln (falls f absolut integrierbar ist und $\mathcal{F}(f(t)) = \hat{f}(\omega)$):

$$(a) \quad \overline{f(t)} \rightarrow \overline{\hat{f}(-\omega)}$$

$$(b) \quad f(ct) \rightarrow \frac{1}{|c|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right) \quad (c \neq 0)$$

$$(c) \quad f(t-a) \rightarrow e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega) \quad (a \in \mathbb{R})$$