ANA2, 2013S

Übungsaufgaben zur Analysis 2 für Informatik

Blatt 7

37. Man bestimme die Laplace-Transformierten der folgenden Funktionen:

    (a) $f(t) = 1 + 2t + 3t^2$

    (b) $g(t) = e^{4 + 5t}$

    (c) $h(t) = e^{i\omega t}$, $h_1(t) = \cos(\omega t)$, $h_2(t) = \sin(\omega t)$

38. Beweisen Sie die beiden Verschiebungssätze

$$\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = F(s + a) \quad \text{(s-Verschiebung)}$$

und

$$\mathcal{L}(f(t - a)\sigma(t - a)) = e^{-as} F(s) \quad \text{(t-Verschiebung)}$$

(mit der Sprung- oder Heavisidefunktion σ).

39. Man zeige mittels partieller Integration, dass

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\, F(s) - f(0_+)$$

gilt, wobei $F(s)$ die Laplace-Transformierte von $f(t)$ bezeichnet und $f(0_+)$ für den rechtsseitigen Grenzwert steht. (Die Funktionen $f(t)$ und $f'(t)$ seien Laplace-transformierbar und $f(t)$ sei stetig auf $\mathbb{R}^+$.)
Durch vollständige Induktion gewinne man daraus die entsprechende Regel für $\mathcal{L}(f^{(n)}(t))$.

40. Zu welcher Funktion ist $F(s) = \dfrac{1}{(1+as)(1+bs)}$ Laplace-Transformierte? Man löse diese Aufgabe sowohl mittels (a) Partialbruchzerlegung als auch mittels (b) Faltung.

41. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung (a) mit Hilfe der Ansatzmethode und (b) mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$y' + 3y = 1 - e^{-x} \quad (x \geq 0).$$

42. Man bestimme die Lösung des folgenden linearen Anfangswertproblems mittels Laplace-Transformation:

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 6 \sinh(2x), \quad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 4.$$