ANA2, 2013S

Übungsaufgaben zur Analysis 2 für Informatik

Blatt 9

49. Man betrachte die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten in drei Variablen

$$a\,u_x + b\,u_y + c\,u_z = f(x,y,z) \quad (a,b,c \in \mathbb{R}).$$

Man zeige, dass diese Gleichung mit Hilfe der Substitution

$$\xi = x,\ \ \eta = bx - ay,\ \ \zeta = cx - az$$

allgemein gelöst werden kann. Insbesondere finde man damit die allgemeine Lösung der Gleichung $2u_x + 3u_y + 4u_z = e^{x+y+z}$.

50. Man finde die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$u_t = u_x + 2u_y - u_z.$$

Welche Lösung erfüllt die Anfangsbedingung $u(x,y,z,0) = x^2 + y^2 + z^2$?

51. Eine Funktion $u(x,y)$ heißt homogen vom Grad n, falls

$$u(\lambda x,\lambda y) = \lambda^n\,u(x,y)$$

für alle $\lambda > 0$ und alle x, y gilt. Man zeige: Falls u eine stetig differenzierbare Funktion ist, genügt sie der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$x\,u_x + y\,u_y = n\,u.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung?

52. Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung

$$y\,u_x - x\,u_y + xyu = 0,$$

welche die Parabel $u = y^2$ in der (y,u)-Ebene enthält.

53. Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden quasilinearen Differentialgleichung für $u = u(x,y)$:

$$(x + u)\,u_x + (y + u)u_y + u = 0.$$

Hinweis: Die zugehörigen Phasen-Differentialgleichungen für $x = x(u)$, $y = y(u)$ können durch die Substitution $v = x/u$ bzw. $v = y/u$ implizit gelöst werden.

54. Man klassifiziere die folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach hyperbolisch, parabolisch bzw. elliptisch:
(a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0$
(b) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + u = 0$
(c) $3u_{xx} - 8u_{xy} + 4u_{yy} - u = 0$
(d) $u_{xy} + xy\,u_{yy} + u_y = 0$
(e) $u_{xx} + y\,u_{yy} + 1/2\,u_y = 0$