ANA2, 2013S

Übungsaufgaben zur Analysis 2 für Informatik

Blatt 11

61. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine m×n-Matrix und $\vec{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Unter der zu einer Vektornorm $\|\vec{x}\|$ zugehörigen Matrixnorm oder Operatornorm $\|A\|$ versteht man

$$\|A\| = \sup_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|.$$

Man zeige (mindestens zwei der nachstehenden drei Behauptungen):

- Mit der so genannten Betragssummennorm $\|\vec{x}\| = \sum_i |x_i|$ als Vektornorm erhält man die Spaltensummennorm $\|A\| = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ als zugehörige Matrixnorm,
- der so genannten Maximumsnorm $\|\vec{x}\| = \max_i |x_i|$ entspricht die Zeilensummennorm $\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$, und
- zur Euklidischen Norm $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ gehört die Spektralnorm $\|A\|$, d.i. die Wurzel des größten Eigenwerts der Matrix A^TA. (Anleiung: Die Matrix A^TA ist – wie man zeigen kann – stets symmetrisch, positiv semidefinit, alle ihre Eigenwerte sind reell und nicht negativ, und es gibt eine Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^n$ aus lauter Eigenvektoren. Bemerkung: Ist die Matrix A symmetrisch, dann ist die Spektralnorm $\|A\|$ gleich dem betragsmäßig größten Eigenwert von A.)

62. Man vergleiche die Lösungen der beiden linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}_1$, $A\vec{x} = \vec{b}_2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3,9 & -10,7 \\ -9,3 & 25,5 \end{pmatrix}, \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -290 \\ 690 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -291 \\ 689 \end{pmatrix}.$$

Was kann daraus geschlossen werden?

63. Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0,13x_1 \quad -45,26x_2 &= -4500 \\ 39,16x_1 \quad -64,32x_2 &= 1400 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens (a) ohne Pivotisierung, (b) mit Pivotisierung bei einer Rechengenauigkeit von 4 signifikanten Stellen.

64. Man bestimme die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrcr} -0{,}35x_1 & +1{,}5x_2 & +122{,}2x_3 & = & 126 \\ 105{,}7x_1 & -440{,}9x_2 & -173{,}7x_3 & = & -1285 \\ 21{,}5x_1 & -101{,}8x_2 & +33{,}4x_3 & = & -229 \end{array}$$

mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens mit Pivotisierung bei einer Rechengenauigkeit von 4 signifikanten Stellen.

65. Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & = & -9 \\ 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 8 \end{array}$$

unter Anwendung des Gesamtschrittverfahrens von Jacobi sowie des Einzelschrittverfahrens von Gauß-Seidel, wobei man zunächst die einzelnen Gleichungen derart umordne, dass das entstehende System das Zeilensummenkriterium erfüllt.

66. Man zeige: Die Anzahl der Punktoperationen zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Unbekannten beträgt

(a) $(n^2 - 1)n! + n$ bei Anwendung der Cramerschen Regel

(Hinweis: Die Auswertung einer $n\times n$-Determinante erfordert, wie man zeigen kann, $(n - 1)n!$ Multiplikationen.)

(b) $(n/3)(n^2 + 3n - 1)$ beim Eliminationsverfahren von Gauß

(c) n^2 pro Schritt für das Iterationsverfahren von Jacobi oder Gauß-Seidel.