Analysis 2 für Informatik
Mathematische Methoden des Visual Computing

Übungsbeispiele

1–3) Man stelle den Definitionsbereich und den Wertebereich folgender Funktionen fest und beschreibe die Höhenlinien:

1)

$$(a) \quad z = x^2 - y^2, \qquad\qquad (b) \quad z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}.$$

2)

$$(a) \quad z = xy, \qquad\qquad (b) \quad z = \frac{x}{y}.$$

3)

$$(a) \quad z = x^2 y, \qquad\qquad (b) \quad z = \frac{x}{y^2}.$$

4) Gegeben sei die Polynomfunktion $f(x, y) = xy^2 - 10x$. Man bestimme die Gleichungen ihrer Schnittkurven mit den senkrechten Ebenen $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ sowie die Höhenlinien für $z = z_0$ und skizziere alle drei Kurvenscharen. Mittels eines Computeralgebrasystems ermittle man eine 3D-Darstellung der gegebenen Funktion.

5) Wie Beispiel 4 mit der Funktion $f(x, y) = x^2y + 2x - y$.

6) Eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ heißt **homogen** vom Grad r, falls für jedes feste $\lambda > 0$ und alle $(x_1, \ldots, x_n)$ aus dem Definitionsbereich von f, für die $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ auch im Definitionsbereich von f liegt, gilt:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, \ldots, x_n).$$

Man beweise, dass die beiden Produktionsfunktionen $f(x, y) = cx^\alpha y^{1-\alpha}$ und $g(x, y) = (cx^\alpha + dy^\alpha)^{1/\alpha}$ (x Arbeit, y Kapital, c, d, α konstant) homogene Funktionen vom Homogenitätsgrad $r = 1$ sind.

7) Man prüfe nach, ob die Funktionen

$$(a) \quad f(x, y, z) = x + (yz)^{1/2} \;\; (\text{für } y, z \geq 0) \qquad\qquad (b) \quad f(x, y) = x^2 + y$$
$$(c) \quad f(x, y) = ax^b y^c \;\; (\text{mit } a, b, c \in \mathbb{R},\ x, y > 0)$$

homogen sind.

8)

(a) Für die Funktion $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ berechne man die partiellen Ableitungen f_x, f_y und die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x_0, y_0) = (0.2, 0.3)$.

(b) Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktion $f(x, y) = x^2 \sin y + \cos(x + 2y)$.

9)

(a) Für die Funktion $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ berechne man die partiellen Ableitungen f_x, f_y und die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x_0,y_0)=(0.5,0.2)$.

(b) Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die beiden Funktionen $g(x,y)=x^2\sin y+e^{x+2y}$ und $\vec{h}(x,y)=\begin{pmatrix} x^2\sin y \\ e^{x+y}\end{pmatrix}$.

10) Man prüfe nach, ob die gemischten partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx} für die folgenden Funktionen $f(x,y)$ übereinstimmen:

$$(a)\quad f(x,y)=\frac{x^2}{1+y^2},\qquad (b)\quad f(x,y)=x^3e^{y^2},\qquad (c)\quad f(x,y)=\sqrt{xy^3}.$$

11) Man berechne alle Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie die Jacobi-Matrix für die folgenden Funktionen:

$$(a)\ f(x,y,z)=x^2\sin(yz)+e^{x+y+z},\quad (b)\ \vec{g}(t)=\begin{pmatrix} t^2\sin t \\ e^{3t} \\ \frac{1}{1+t^2}\end{pmatrix},\quad (c)\ \vec{h}(x,y)=\begin{pmatrix} x^2\sin y \\ e^{x+2y}\end{pmatrix}.$$

12–13) Man bestimme den Definitionsbereich der Vektorfunktion $\mathbf{x}(t)$, sowie die Ableitung $\mathbf{x}'(t)$, wo sie existiert:

12)

$$\mathbf{x}(t)=\left(\left(\frac{2t}{\sqrt{1-3t^2}}\right)^{\frac{5}{4}},\sin\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\right)$$

13)

$$\mathbf{x}(t)=\left(\sin(1+\cos(t)),\frac{t^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

14) Das elektrostatische Potential einer Punktladung Q im Koordinatenursprung ist durch

$$\varphi_1(x,y,z)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

gegeben, für das Potential eines Dipols mit dem Dipolmoment $\mathbf{p}=(p,0,0)$ gilt:

$$\varphi_2(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

(Dabei sind Q, p und ϵ_0 Konstante.) In beiden Fällen berechne man das zugehörige elektrische Feld $\mathbf{E}$ nach der Formel $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\varphi$.

15–18) Man bestimme die partiellen Ableitungen erster Ordnung der folgenden Funktionen:

15) $f(x,y)=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{4x^2y^2}{1+x+y}\right)$ **16)** $f(x,y,z)=\dfrac{y+\sqrt{xz}}{1+\sin^2(xyz)}$

17) $f(x,y)=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2x^3y}{y-x^3}\right)$ **18)** $f(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x}+y^3z^2}{1+\cos^2(1+x)}$

19–22) Man bestimme die Funktionalmatrix zu $\mathbf{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$:

19) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x+y-z) \\ \cos\left(\frac{xy}{z}\right) \end{pmatrix}$

20) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{y^2 z} \\ x^y z^2 \end{pmatrix}$

21) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x-z}{y+1}} \\ z \cdot e^{-\frac{x}{y}} \end{pmatrix}$

22) $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(\mathrm{Arctan}(x+y^2)) \\ x\cos(y^2-\sqrt{x}) \cdot \tan(xyz) \end{pmatrix}$

23) Durch $z = \frac{xy}{x+y}$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Beschränkung von x und y auf die Werte $x = e^t$ und $y = e^{-t}$ ($t \in \mathbb{R}$) liefert eine Kurve auf dieser Fläche. Man bestimme $\frac{dz}{dt}$ mittels Kettenregel und mache die Probe, indem man zuerst x und y in z einsetzt und anschließend nach dem Parameter t differenziert. Wo verläuft diese Kurve auf der Fläche horizontal?

24) Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u} g(u,v) = \ln(u\sin(u) - v)$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v} g(u,v) = \tan(-u + v^3)$. Man bestimme $h(t) = \frac{d}{dt} g(2t, t^2+1)$.

25) Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u} g(u,v) = e^{-u^2}$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v} g(u,v) = -e^{v^3}$. Man bestimme $h(t) = \frac{d}{dt} g(t^2-1, 3t)$.

26) Mit Hilfe der Kettenregel berechne man den Wert der partiellen Ableitung der Funktion $F(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$ nach y an der Stelle $(0,0)$, wobei $f(u,v) = u^2 + v^2$, $g(x,y) = \cos x + \sin y$ und $h(x,y) = x + y + 1$ ist.

27) Es sei $F(x,y) = \frac{2x^4+y}{y^5-2x}$, $x = 2u - 3v + 1$, $y = u + 2v - 2$. Man berechne $\frac{\partial F}{\partial u}$ und $\frac{\partial F}{\partial v}$ für $u = 2$, $v = 1$ mit Hilfe der Kettenregel.

28) Gegeben sei die quadratische Form $q(\mathbf{x}) = q(x,y) = 4x^2 + 2bxy + 25y^2$ mit $b \in \mathbb{R}$. Wie lautet die zugehörige symmetrische Matrix A, sodass $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A\mathbf{x}^T$? Für welche Werte von b ist die Form positiv definit?

29) Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass die quadratische Form $3x^2 + axy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$ positiv definit ist.

30) Wie Beispiel 29 für $x^2 + axy + 3xz + y^2 - 2yz + 4z^2$.

31) Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodass die quadratische Form $-x^2 + axy - 3xz + y^2 - 2yz + 4z^2$ negativ definit ist.

32–37) Bestimmen Sie das Definitheitsverhalten der folgenden Matrizen:

32) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}$

33) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -10 \end{pmatrix}$

34) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & -7 & -20 \end{pmatrix}$

35) $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -10 \end{pmatrix}$

36) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

37) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hinweis: Setzen Sie den Vektor $(1,0,0)$ und den Vektor $(0,0,1)$ in die der Matrix entsprechenden quadratischen Form ein.

38–48) Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x,y)$ im Inneren des angegebenen Bereichs und alle absoluten Extrema im gesamten, angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist.

38) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ für $x,y \in \mathbb{R}$.

39) $f(x,y) = 2x^3 - 5xy^2 + 3y$ für $x,y \in \mathbb{R}$.

40) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$ für $x,y \in \mathbb{R}$.

41) $f(x,y) = (x^2+5y^2)e^{-x^2-y^2}$ für $x,y \in \mathbb{R}$.

42) $f(x,y) = (x^2+3y^2)e^{-x^2-2y^2}$ für $x,y \in \mathbb{R}$.

43) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x,y \le \pi/2$.

44) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x,y \le \pi$.

45) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x - \sin y$ für $0 \le x,y \le \pi/2$.

46) $f(x,y) = \sin(x+y) + \sin x - \sin y$ für $0 \le x,y \le \pi$.

47) $f(x,y) = \cos(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x,y \le \pi/2$.

48) $f(x,y) = \cos(x+y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x,y \le \pi$.

49) Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = 4(x-2)(y^2+10y) + 3x^3$.

50) Man finde alle stationären Punkte der Funktion $f(x,y,z) = 2x^2 - 3xz^2 + y^3 + 3z^2 - 3y + 3$ und bestimme daraus die relativen Extrema.

51) Man bestimme die Extrema von $f(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2$.

52) Gesucht ist das absolute Maximum der Funktion $f(x,y) = xy(3-x-y)$ auf dem Definitionsbereich $D = \{(x,y) | x \ge 0, y \ge 0, y \le 3-x\}$.
(Anleitung: Man skizziere den Definitionsbereich D in der (x,y)-Ebene, bestimme dessen Rand und ermittle alle Funktionswerte auf dem Rand. Das absolute Maximum ist dann unter den relativen Maxima im Inneren von D sowie unter den Funktionswerten am Rand von D zu suchen.)

53–72) Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

53) Berechnen Sie die Extrema der Funktion $f(x,y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

54) Berechnen Sie den maximalen Wert von $3x + 2y$ unter der Nebenbedingung $x + y^2 = 0$.

55) Berechnen Sie den maximalen Wert von $x - 3y$ unter der Nebenbedingung $x^2 - y = 0$.

56) Berechnen Sie den minimalen Wert von x^2+y^2 unter der Nebenbedingung $2x+3y-1 = 0$.

57) Man bestimme denjenigen Punkt auf der Ebene $z = x + y$, der von dem Punkt $(1,0,0)$ den kleinsten (euklidischen) Abstand hat.

58) Man bestimme die extremalen Werte der Funktion $f(x,y) = xy$ auf der Einheitskreislinie.

59) Man bestimme zu einer gegebenen Kugel einen eingeschriebenen Zylinder von maximaler Oberfläche.

60) Man bestimme zu einer gegebenen Kugel einen eingeschriebenen Zylinder von maximalem Volumen.

61) Man bestimme zu einer gegebenen Kugel einen eingeschriebenen Drehkegel von maximaler Oberfläche.

62) Man bestimme zu einer gegebenen Kugel einen eingeschriebenen Drehkegel von maximalem Volumen.

63) Welcher Quader mit gegebener Oberfläche A besitzt maximales Volumen?

64) Welcher Kegel mit gegebener Oberfläche A besitzt maximales Volumen?

65) Welcher Doppelkegel (das heißt, zwei Drehkegel mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, die an ihren Basisflächen zusammengeklebt sind) mit gegebener Oberfläche A besitzt maximales Volumen?

Hinweis: Quadrieren Sie die Nebenbedingung.

66) Ein Turm habe die Form eines oben mittels einer Ebene abgeschnittenen Zylinders. Das Dach hat somit die Form einer Ellipse. Der Grundriß des Turms sei ein Kreis mit 12m Durchmesser und Mittelpunkt im Ursprung. Die Ebene, in der das Dach liegt, habe die Gleichung $z = x + 2y + 55$. Berechnen Sie die Höhe des Turms.

67) Für welche Werte wird $f(x, y, z) = xyz$ unter den Nebenbedingungen $xy + yz + zx = a$ und $x + y + z = b$ möglichst groß?

68) Für welche Werte wird $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter den Nebenbedingungen $xy + yz + zx = a$ und $x + y + z = b$ möglichst groß?

69) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x + 3y + 2z$ unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 = 1$ und $x + z = 2$.

70) Die Herstellung eines Produks P unter Verwendung zweier Produktionsfaktoren A und B werde durch die Produktionsfunktion

$$\text{(NB)} \qquad y = f(x_1, x_2) = 5 - \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}}$$

beschrieben. Der Gewinn des Produzenten sei durch

$$G(x_1, x_2, y) = yp_0 - x_1p_1 - x_2p_2$$

gegeben. Man maximiere den Gewinn für die Preise $p_0 = 2, p_1 = 1, p_2 = 8$ und unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (NB), und ermittle die im Gewinnmaximum benötigten Faktormengen x_1, x_2, die Produktmenge y und den Unternehmergewinn G.

71) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion $f(x, y, z) = x + y + z^2$ unter den Nebenbedingungen $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ und $x + y = 1$.

72) Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion $f(x, y, z) = x - y + z^2$ unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ und $x - y = 1$.

73–94) Berechnen Sie die folgenden Bereichsintegrale:

73) $\iint_B (xy + x^2 - y^2)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Rechtecksbereich sei, welcher durch die Eckpunkte $(-1, 1)$, $(5, 1)$, $(5, 5)$ und $(-1, 5)$ bestimmt ist.

74) $\iint_B (x + 2xy - y^2)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Rechtecksbereich sei, welcher durch die Eckpunkte $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(4, 5)$ und $(3, 5)$ bestimmt ist.

75) $\iint_B \mathrm{e}^{2x}(y+1)\,dx\,dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Rechtecksbereich sei, welcher durch die Eckpunkte $(-2,0)$, $(4,0)$, $(4,3)$ und $(-2,3)$ bestimmt ist.

76) $\iint\limits_B \sin(x+y)\,dx\,dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$, (π,π) sei.

77) $\iint\limits_B x^2\ln(y)\,dx\,dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Bereich $\{(x,y) \mid\ 1 \leq y \leq 2 \text{ und } |x| \leq 2\}$ sei.

78) $\iint_B 12x^2y^3\,dx\,dy$, wobei B der durch $x=4$, $y=1$ und $x+2y=2$ berandete beschränkte Bereich der (x,y)-Ebene sei.

79) $\iint_B (y-x)\,dx\,dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Punkte $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-2)$ und $(4,3)$ festgelegte konvexe Viereck sei.

80) $\iint_B (xy+y)\,dx\,dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Punkte $(-3,0)$, $(1,5)$ und $(2,-2)$ bestimmte Dreieck sei.

81) $\iint\limits_B \frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$, mit $B \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $(2,2), (3,2), (3,3)$.

82) $\iint\limits_B \frac{1}{x+y}\,dx\,dy$, mit $B = \{(x,y) \,|\, 1 \leq x \leq 2,\ 3 \leq y \leq 2+x\}$.

83) $\iint\limits_B (xy+x^2-y^2)\,dx\,dy$, mit $B \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis $x^2+y^2 \leq 1$.

84) $\iint\limits_B (x+y)^2\,dx\,dy$, mit $B \subset \mathbb{R}^2$ bestimmt durch $x^2+y^2 \leq 1$.

85) $\iint\limits_B xe^y\,dx\,dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 2 sei.

86) $\iint\limits_B x\ln(y)\,dx\,dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Bereich $\{(x,y) \mid\ y \geq |x| \text{ und } 1 \leq x^2+y^2 \leq 3\}$ sei.

87) $\iiint\limits_B (xy^2z+2z^2)\,dx\,dy\,dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Bereich $\{(x,y,z) \mid\ 1 \leq x \leq 2, |y| \leq 2 \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}$ sei.

88) $\iiint\limits_B \left(\mathrm{e}^{2x}(y+1)+x\sin(z)\right)\,dx\,dy\,dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Bereich $\{(x,y,z) \mid\ 0 \leq x \leq 2, |y| \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq \pi\}$ sei.

89) $\iiint\limits_B y\,dx\,dy\,dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel mit Mittelpunkt $(0,3,0)$ und Radius 5 sei.

90) $\iiint\limits_B |x|\cdot|y|\,dx\,dy\,dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1 sei.

91) $\iiint\limits_B x^2yz\,dx\,dy\,dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1 sei.

92) $\iiint\limits_B x\,dx\,dy\,dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder $B = \{(x,y,z)|1 \leq z \leq 2, (x-1)^2+y^2 \leq 2\}$ sei.

93) $\iiint\limits_B xy\,dx\,dy\,dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinderring $B = \{(x,y,z)|1 \leq z \leq 2, 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$ sei.

94) $\iiint\limits_B x(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinderring $B = \{(x,y,z)|0 \leq z \leq 2, 1 \leq x^2+y^2 \leq 3\}$ sei.

95) Es sei B der durch $x = 4$, $y = 1$ und $x + 2y = 2$ begrenzte beschränkte Bereich in der (x, y)-Ebene. Man berechne $\iint\limits_B 12x^2y^2dxdy$ auf zwei verschiedene Arten (durch Vertrauschen der Integrationsreihenfolge).

96) Man berechne das Doppelintegral

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y}} x^2\sqrt{1-y}\,dxdy.$$

Welches Bereichsintegral wird dadurch gegeben? Man berechne das Integral auch bei vertauschter Integrationsreihenfolge.

97) Man zeige, dass gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1.$$

Anleitung: Man betrachte zunächst das Bereichsintegral $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$, welches durch Transformation in Polarkoordinaten bestimmt werden kann un den Wert 2π besitzt. Daraus ist die Behauptung abzuleiten.

98) Man berechne das Bereichsintegral $\iiint\limits_B x^2dxdydz$, wobei $B \subset \mathbb{R}^3$ der Hohlzylinder $B = \{(x, y, z) \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 1 \leq z \leq 2\}$ ist.

99) Berechnen Sie die Fläche einer Ellipse, deren Haupt- bzw. Nebenachse die Länge a bzw. b hat, mittels eines Bereichsintegrals.
Hinweis: Benützen Sie die Transformation $x = a \cdot r \cdot \cos\phi$ und $y = b \cdot r \cdot \sin\phi$.

100) Berechnen Sie

$$\iint_B (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

mit $B = \{(x, y) :\ 1 \leq x^2 - y^2 \leq 3,\ 3 \leq xy \leq 5\}$.
Hinweis: Transformieren Sie den Bereich gemäß

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}, \\ y(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-u + \sqrt{u^2 + 4v^2}} \end{aligned}$$

und benützen Sie die Tatsache, daß die Funktionaldeterminante einer Transformation invers zur Funktionaldeterminante der inversen Transformation ist.

101) Berechnen Sie

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{dx\,dy}{1 - x^2y^2}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Transformation $x = \frac{\sin v}{\sin u}$ und $y = \frac{\cos u}{\cos v}$.

102) Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationskörpers, der entsteht, wenn das durch

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1, \qquad -10 \leq y \leq 10,$$

gegebene Hyperbelstück um die y-Achse rotiert.

Hinweis: Das Integral $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ läßt sich mit der Substitution $x = \sinh t$ ($dx = \cosh t\,dt$) berechnen. Man beachte weiters $\cosh t = (e^t - e^{-t})/2$.

103) Die Punkte $(0,0,0)$, $(0,0,2)$, $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$ seien die Eckpunkte eines Tetraeders. Bestimmen Sie dessen Volumen mit Hilfe eines geeigneten Bereichsintegrals.

104) In die Kugel $\{(x,y,z) \big|\, x^2+y^2+z^2=9\}$ werde ein zylindrisches Loch gebohrt. Der Zylinder sei durch $\{(x,y,z) \big|\, x^2+2x+y^2 \le 0\}$ gegeben. Wie groß ist das Restvolumen?

105) Das Ellipsoid mit Mittelpunkt $(0,0,0)$ und den Achsenlängen $5,3,3$ kann durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$$

beschrieben werden. Berechnen Sie die Oberfläche dieses Ellipsoids, indem Sie es als Rotationskörper auffassen.

106) Gegeben ist ein Kegel mit Höhe h und Basiskreisradius r. Berechnen Sie die Mantelfläche, indem Sie den Kegel als Rotationskörper interpretieren.

107) Berechnen Sie die Oberfläche einer Kugel mit Radius r, indem Sie die Kugel als Rotationskörper interpretieren.

108) Man gebe eine Parametrisierung für die Mantelfläche eines Drehzylinders mit dem Radius R und der z-Achse als Rotationsachse an. Für welche Parameterwerte erhält man den Punkt $P(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2}, 3\pi/4)$ auf der Zylinderoberfläche.
Gesucht sind ferner die Parameterdarstellungen für folgende drei Kurven durch den Punkt P auf der Mantelfläche:

(a) eine Meridianlinie (d.h. Parallele zur Zylinderachse),
(b) einen Breitenkreis,
(c) eine Schraubenlinie mit der Ganghöhe π.

109) Gegeben sei die parametrisierte Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$$

für $0 \le t \le 2\pi$ (Lissajous-Figur). Man skizziere die Kurve $\vec{x}(t)$. Ferner berechne man mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ sowie $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $y = y(x)$. In welchen Punkten hat die Kurve waagrechte bzw. senkrechte Tangenten? Können Sie auch die Wendepunkte dieser Kurve bestimmen? (Verwenden Sie dabei ein Computeralgebrasystem oder WolframAlpha.)

110) Zeigen Sie, dass die Funktion $\vec{x}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gemäß

$$\vec{x}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} x(\theta,\varphi) \\ y(\theta,\varphi) \\ z(\theta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R+r\cos\theta)\cos\varphi \\ (R+r\cos\theta)\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \text{mit } 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

als Parametrisierung der Oberfläche eines Torus angesehen werden kann. Erklären Sie diese Darstellung anhand einer geeigneten Skizze. Wie lautet die Jakobi-Matrix dieser Funktion?

111) Man bestimme Volumen und Oberfläche eines Torus. Dabei beachte man die in Beispiel 110 angegebene Parametrisierung.

112–116) Man bestimme die Bogenlänge der folgenden Kurven.

112)

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, 0 \le t \le 2\pi.$$

Hinweis: Man substituiere $t = \sinh(u)/2$ und verwende $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ sowie $\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$.

113)

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, 0 \le t \le \pi.$$

114)

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -t^3 \\ 6t \end{pmatrix}, 0 \le t \le 5.$$

115)

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}, 0 \le t \le 2\pi.$$

116)

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, 0 \le x(t) \le 5,$$

wobei $x = x(t)$ und $y = y(t)$ implizit durch $y^2 = x^3$ gegeben sind.

117) Wie groß sind die Bogenlängen der folgenden Kurven?

$$(a)\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{3}(2t+1)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix},\ \ 0 \le t \le T, \quad (b)\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},\ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

118) Parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2} \end{pmatrix}, t \ge 0$$

119) Parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(t+1)^{3/2} \\ t^2/2 \end{pmatrix}, t \ge 0$$

120) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve, die durch die Gleichung $x^2 + y^2 = |x|$ implizit gegeben ist.

121–124) Man berechne das Kurvenintegral der skalarwertigen Funktion f längs der Kurve $\mathbf{c}(t)$.

121) $f(x, y) = 2x + 5y$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi$.

122) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi/2$.

123) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$, $\mathbf{c}(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$, $\pi/6 \le t \le \pi/3$.

124) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\mathbf{c}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

125) Ein Turm habe die Form eines oben mittels einer Ebene abgeschnittenen Zylinders. Das Dach hat somit die Form einer Ellipse. Der Grundriß des Turms sei ein Kreis mit 12m Durchmesser, seine Höhe betrage 35m. Der tiefste Punkt des Dachs liegt in 30m Höhe. Wie groß ist die Fläche der Außenmauer dieses Turms.
Anleitung: Übersetzen Sie die Aufgabenstellung in ein geeignetes Kurvenintegral einer skalarwertigen Funktion und berechenen Sie dieses Integral.

126) Man berechne das Kurvenintegral über das Vektorfeld $u(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}$ entlang des Weges $3y^2 = 4x$ von $(0,0)$ nach $(3,2)$ und entlang des Streckenzugs $(0,0) \to (3,0) \to (3,2)$.

127) Man berechne das Kurvenintegral über das Vektorfeld

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

(*a*) längs der beiden achsenparallelen Wege $(0,0) \to (0,2) \to (3,2)$ sowie $(0,0) \to (3,0) \to 3,2)$

(*b*) entlang der Parabel $3y^2 = 4x$ von $(0,0)$ nach $(3,2)$.

128) Man berechne das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x-y^2 \\ x^2-y^2 \end{pmatrix}$ entlang des Weges $3y^2 = 4x$ von $(0,0)$ nach $(3,2)$ und entlang des Streckenzugs $(0,0) \to (3,0) \to (3,2)$.

129) Man berechne das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2-y \end{pmatrix}$ entlang des Weges $3y^2 = 4x$ von $(0,0)$ nach $(3,2)$ und entlang des Streckenzugs $(0,0) \to (3,0) \to (3,2)$.

130) Zeigen Sie, daß das Kurvenintegral $\int\limits_c (\cos x\,dx + e^{-y}\,dy + z^2\,dz)$ wegunabhängig ist und berechnen Sie es über einen Weg von $(-1,3,4)$ nach $(6,9,-2)$.

131) Zeigen Sie, daß das Kurvenintegral $\int\limits_c (e^{-x}\,dx + \cos y\,dy + z^5\,dz)$ wegunabhängig ist und berechnen Sie es über einen Weg von $(1,2,3)$ nach $(-4,-5,-6)$.

132) Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral $\int\limits_c (y\,dx + (y-x)\,dy)$ nicht wegunabhängig ist, indem Sie zwei verschiedene Kurven von $(0,0)$ nach $(1,1)$ wählen, für welche die Werte der Kurvenintegrale verschieden sind.

133) Berechnen Sie zunächst $\int\limits_c (y\,dx + x\,dy)$ mit $c(t) = (t^2, t)$, $0 \leq t \leq 1$ und untersuchen Sie danach, ob das Kurvenintegral wegunabhängig ist.

134) Berechnen Sie $\int\limits_c (y^2\,dx + x^2\,dy)$ mit $c(t) = (t, \sqrt{t})$, $0 \leq t \leq 1$. Ist das Kurvenintegral wegunabhängig?

135) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C (y^2\,dx + 2xy\,dy)$
a) entlang des Streckenzuges $(1,1) \to (3,1) \to (3,2)$;
b) entlang der Geraden, die die Punkte $(1,1)$ und $(3,2)$ verbindet.
Untersuchen Sie danach, ob das Kurvenintegral wegunabhängig ist.

136) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C (\sin y\,dx + x\cos y\,dy)$
a) entlang des Streckenzuges $(-1,0) \to (0,0) \to (0,2)$;

b) entlang der Geraden, die die Punkte $(-1, 0)$ und $(0, 2)$ verbindet.
Untersuchen Sie danach, ob das Kurvenintegral wegunabhängig ist.

137) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C (e^x \sin y\, dx + e^x \cos y\, dy)$
a) entlang des Streckenzuges $(-1, -1) \to (-1, 0) \to (2, 0)$;
b) entlang der Geraden, die die Punkte $(-1, -1)$ und $(2, 0)$ verbindet.
Untersuchen Sie danach, ob das Kurvenintegral wegunabhängig ist.

138) Berechnen Sie $\int\limits_c (e^x\, dx + e^y\, dy)$ mit $\mathbf{c}(t) = (\sqrt{t}, \ln t)$, $1 \le t \le 2$. Ist das Kurvenintegral wegunabhängig?

139) Berechnen Sie $\int\limits_c (y^2 e^x\, dx + 2ye^x\, dy)$ mit $\mathbf{c}(t) = (1, \tan t)$, $0 \le t \le \pi/4$. Ist das Kurvenintegral wegunabhängig?

140) Man untersuche, ob das Kurvenintegral

$$\int_c (2xy + \arctan y + \cos x) dx + (x^2 + \frac{x}{1+y^2}) dy$$

wegunabhängig ist und bestimme gegebenenfalls eine Stammfunktion. Welchen Wert hat das Integral über einen Weg c von $(0, 0)$ nach $(\pi, 1)$?

141) Man zeige, dass das Kurvenintegral

$$\int_c (\cos x dx + e^{-y} dy + z^2 dz)$$

wegunabhängig ist und berechne dieses Integral über einen Weg von $(-1, 3, 4)$ nach $(6, 9, -2)$.

142) Man bestimme, falls möglich, ein Potential des Vektorfeldes

$$\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2y}{(x+y)^2} \\ -\frac{2x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}.$$

In welchen Gebieten $B \subset \mathbb{R}^2$ ist das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wegunabhängig?

143) Man bestimme, falls möglich, ein Potential des Vektorfeldes

$$\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+(x^2+y)^2} \\ \frac{1}{1+(x^2+y)^2} \end{pmatrix}.$$

In welchen Gebieten $B \subset \mathbb{R}^2$ ist das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\mathbf{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wegunabhängig?

144) Sei $\alpha \in \mathbb{Z}$. Man untersuche, für welche α das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y) = (y^{\alpha-1}, (\alpha-1)xy^{\alpha-2})$ eine Stammfunktion besitzt und berechne diese gegebenenfalls.

145) Man zeige, dass das Vektorfeld $\vec{f}(x, y) = (y^{\alpha-2}, (\alpha - 2)xy^{\alpha-3})$ eine Stammfunktion besitzt und berechne diese.

146) Welches der folgenden Vektorfelder $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ ist ein Gradientenfeld und wie lautet ggf. eine zu $\mathbf{f}$ gehörende Stammfunktion?

$(a)\quad (1, 1, 1),\qquad (b)\quad (-x, -y, -z),\qquad (c)\quad (2x, 2y, 0),\qquad (d)\quad (yz, xz, x^2).$

147) Man überprüfe, ob das Vektorfeld $\mathbf{f} = (yz, (x-2y)z, (x-y)y)$ eine Stammfunktion besitzt. Wenn ja, gebe man alle Stammfunktionen an.

148) Man finde (z.B. unter Zuhilfenahme der Formeln von Moivre) für die Funktionen

$$\sin^2 t, \cos^2 t, \sin^3 t, \cos^3 t$$

Darstellungen als trigonometrische Polynome der Periode 2π.

149) Unter Zuhilfenahme der Moivre'schen Formel finde man eine Darstellung für die Funktionen

$$\cos^2 t, \sin^2 t, \cos^3 t, \sin^3 t, \cos^4 t, \sin^4 t$$

als trigonometrische Polynome der Periode 2π.

150) Zeigen Sie die folgende Identität.

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

151) Zeigen Sie, daß für je zwei Funktionen f und g aus der Menge $\{1/\sqrt{2}, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \dots\}$ gilt:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{falls } f \equiv g \\ 0 & \text{falls } f \not\equiv g \end{cases}$$

152) Man zeige, dass die Exponentialfunktionen $\{e^{ikt} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthogonalsystem im $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexwertigen 2π-periodischen stückweise stetigen Funktionen bilden, d.h.

$$\langle e^{ikt}, e^{i\ell t}\rangle = \int_0^{2\pi} e^{ikt}\overline{e^{i\ell t}}dt = \int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-i\ell t}dt = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ 2\pi, & k = \ell \end{cases}$$

und leite daraus die Orthogonalität von $\cos(mt)$ und $\sin(mt)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ her, d.h.

$$\langle \cos mt, \sin nt\rangle = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)dt = 0.$$

153) Im Vektorraum V der komplexwertigen 2π-periodischen stückweise stetigen Funktionen gebe man ein geeignetes Skalarprodukt $\langle f, g\rangle$ an, so dass die Exponentialfunktionen $\{u_k(t) = e^{ikt} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem in V bilden (vergleiche mit Beispiel 152). Aus der allgemeinen Bessel'schen Ungleichung

$$\sum_k |\langle f, u_k\rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

leite man dann die Bessel'sche Ungleichung für komplexe Fourierreihen her.

154) Sei $f(t)$ eine auf $[0, T]$ stückweise stetige T-periodische Funktion $f(t)$. Man zeige, daß dann für die zu $f(t)$ gehörende Fourierreihe

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \sim f(t)$$

der folgende Verschiebungssatz (Verschiebung im Frequenzbereich) gilt:

$$e^{in\omega t}f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-n}e^{ik\omega t}, \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

155) Bestimmen Sie die (reelle und komplexe) Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(t) = t, \qquad 0 \le t < 2\pi,\ 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

156) Bestimmen Sie die (reelle und komplexe) Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(t) = t^2, \qquad 0 \le t < 2\pi,\ 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

157) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(t) = t^2, \qquad -\pi \le t < \pi,\ 2\pi\text{-periodisch fortgesetzt.}$$

158) Bestimmen Sie die (reelle und komplexe) Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(t) = \cos t + |\cos t|.$$

159) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \sin\frac{t}{2} & \text{für } 0 < t \le \pi \\ 1 + \cos\frac{t}{2} & \text{für } \pi < t \le 2\pi \end{cases}$$

mit periodischer Fortsetzung mit der Periode 2π.

160) Sei $f(t)$ die 2π-periodische Rechteckschwingung mit Amplitude 1: Auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ ist $f(t)$ definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi, \\ -1, & \pi \le t < 2\pi, \end{cases}$$

und außerhalb durch 2π-periodische Fortsetzung. Zeigen Sie, daß die Fourierreihe $S_f(t)$ von $f(t)$

161) Unter Verwendung der in Beispiel 160 bestimmten Fourierreihe der Rechteckschwingung $f(t)$ bestimme man die Fourierreihe der im Intervall $[0, 2\pi)$ folgendermaßen definierten 2π-periodischen Funktion $g(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < \pi, \\ 2\pi - t, & \pi \le t < 2\pi. \end{cases}$$

Anmerkung: Man vergleiche $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ mit $g(t)$.

162) Man bestimme die reelle und die komplexe Fourierreihe der 2π-periodischen Cosinusimpuls-Funktion

$$f(t) = \max\{\cos t, 0\} = \frac{1}{2}\big(\cos t + |\cos t|\big).$$

163) Mit Hilfe des Resultats von Beispiel 162 sowie geeigneter Rechenregeln für Fourierreihen bestimme man die Fourierentwicklung für den gleichgerichteten Cosinus $|\cos t|$ und für den gleichgerichteten Sinus $|\sin t|$ jeweils in Sinus-Cosinus-Form und in Exponentialform.

164) Zeigen Sie, daß für $-\pi/2 < x < \pi/2$ die folgende Identität gilt:

$$\frac{\cos 3x}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{\cos 7x}{5\cdot 7\cdot 9} - \frac{\cos 9x}{7\cdot 9\cdot 11} + \cdots = \frac{\pi}{8}\cos^2 x - \frac{1}{3}\cos x$$

Gilt diese Identität auch in einem Intervall $(-a, a)$ mit $a > \pi/2$?
Hinweis: Entwickeln Sie $\cos^2 x$ in eine Fourierreihe.

165) Entwickeln Sie die Funktion $f(t) = \sin(at)$ $(a \notin \mathbb{Z})$ gegeben auf $[-\pi, \pi]$ mit periodischer Fortsetzung mit der Periode 2π in ihre reelle Fourierreihe.

166) Die Funktion $f(t) = 1 - t$ für $0 < t < 1$ soll auf dem Intervall $(-1, +1)$ zu einer (a) geraden bzw. (b) ungeraden Funktion erweitert und außerhalb dieses Intervalls mit der Periodenlänge 2 periodisch fortgesetzt werden. Man ermittle die beiden komplexen Fourierreihen.

167) Zeigen Sie, daß eine gerade T-periodische Funktion (d.h. $f(t) = f(-t)$) in ihrer reellen Fourierentwicklung keine Sinusterme enthalten kann.

168) Zeigen Sie, daß eine ungerade T-periodische Funktion (d.h. $f(t) = -f(-t)$) in ihrer reellen Fourierentwicklung keine Cosinusterme enthalten kann.

169) Man zeige: Ist eine 2π-periodische Funktion $f(t)$ gerade, d.h. $f(-t) = f(t)$, dann sind alle Fourierkoeffizienten $b_n = 0$, für $n \geq 1$. Ist $f(t)$ hingegen ungerade, d.h. $f(-t) = -f(t)$, dann sind alle Fourierkoeffizienten $a_n = 0$, für $n \geq 0$.

170) Man zeige: Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten a_n, b_n bzw. c_k einer 2π-periodischen Funktion kann an Stelle des Intervalls $[0, 2\pi]$ auch jedes Intervall der Form $[a, a + 2\pi]$ mit $a \in \mathbb{R}$ als Integrationsintervall gewählt werden.

171) Wie lautet die reelle Fourierreihe der Funktion $f(t) = \frac{t^2}{\pi^2}$ für $-\pi \leq t \leq \pi$ und $f(t + 2\pi) = f(t)$? Können Sie aus dieser Darstellung die Gültigkeit nachstehender Formeln ableiten?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

172) Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Fourierreihe den Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
Hinweis: Man betrachte Beispiel 171.

173) Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des $\cosh z$,

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

die Summe der folgenden trigonometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n)!}$$

Hinweis: Man fasse die Reihe als Realteil von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2nt + i \sin 2nt}{(2n)!}$ auf.

174) Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des $\sinh z$,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

die Summe der folgenden trigonometrischen Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)!}$$

175) Man entwickle die Funktion

$$g(t) = e^t, \quad 0 \leq t < T$$

in eine reine Cosinusreihe, d.h., man bestimme die (gewöhnliche) Fourier-Reihe der $2T$-periodischen Funktion $h(t)$, welche die gerade $2T$-periodische Fortsetzung von $g(t)$ darstellt:

$$h(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < T, \\ g(-t), & -T < t < 0, \end{cases} \qquad h(t+2T) = h(t).$$

176) Man entwickle die Funktion

$$f(t) = \sin t, \quad 0 \leq t < \pi$$

in eine Fourier-Cosinusreihe, indem man $f(t)$ gerade mit Periode $T = 2\pi$ fortsetzt und die (gewöhnliche) Fourier-Reihe berechnet.

177) Sei $f(x) = e^{i\beta x}$ für $-\pi \leq x \leq \pi$, wobei β eine reelle, jedoch keine natürliche Zahl ist. Man zeige unter Verwendung der Parseval'schen Gleichung für komplexe Fourier-Reihen, dass

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi(\beta - m))}{(\beta - m)^2} = \pi^2.$$

178) Man zeige mit Hilfe des Weierstraß'schen M-Tests (Satz 8.10), dass unter der Voraussetzung $s > 0$ die folgende Reihe gleichmäßig auf $[0, \infty)$ konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-st}(-1)^k u\big(t - \frac{kT}{2}\big).$$

Bemerkung: $u(t)$ bezeichnet die Heavisidefunktion.

179) Man zeige die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1+2nx}}$$

im Intervall $[0, \infty)$.

180) Man zeige die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\ \sqrt[n]{1+x^2}}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

181) Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ gegen eine stetige Grenzfunktion $f(x)$ konvergiert und berechnen Sie

$$\int_0^\infty f(x)\,dx.$$

182) Sei $\sum_{n=0}^\infty a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $T > 0$. Untersuchen Sie, ob die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^\infty \sin(a_n x)$$

auf dem Intervall $[-T, T]$ gleichmäßig konvergiert.

183) Entwickeln Sie die Funktion $f(t) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ mit periodischer Fortsetzung mit Periode 2π in ihre reelle Fourierreihe.

184) Sei $a \notin \mathbb{Z}$. Entwickeln Sie $f(t) = \pi \cos(at)$, $0 \le t < 2\pi$, mit 2π-periodischer Fortsetzung in eine Fourierreihe und beweisen Sie durch geeignete Wahl von t die Identität

$$\frac{\pi}{\sin(\pi a)} = \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2-1} + \frac{2a}{a^2-4} - \frac{2a}{a^2-9} + \frac{2a}{a^2-16} - \cdots$$

185) Man zeige, dass für die Fouriermatrix F_N, gegeben durch

$$F_N := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

mit $w = e^{2\pi i/N}$, gilt:

$$F_N \cdot \overline{F_N} = N \cdot E_N.$$

Dabei bezeichnet $\overline{F_N}$ die konjugierte Matrix und E_N die $N \times N$-Einheitsmatrix.

186) Man zeige unter Verwendung von Beispiel 185, daß zwischen den Funktionswerten y_j, $j = 0, \ldots, N-1$ und den Spektralkoeffizienten c_k, $k = 0, \ldots, N-1$ folgende Beziehung gilt, die sogenannte Parsevalsche-Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |y_j|^2.$$

187) Im Vektorraum $V = \mathbb{C}^N$ gebe man ein geeignetes Skalarprodukt $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle$ an, so dass die N Vektoren

$$\left\{ \vec{u}_k = \left(e^{\frac{2\pi i}{N} kj}, j = 0, \ldots, N-1 \right), k = 0, \ldots, N-1 \right\}$$

eine Orthonormalbasis in V bilden. Aus der allgemeinen Parseval'schen Gleichung

$$\sum_k |\langle f, u_k \rangle|^2 = \|f\|^2$$

leite man dann die Parseval'sche Gleichung für die DFT her.

188) Man zeige die folgenden Verschiebungsformeln einer diskreten periodischen Funktion $\vec{y} \in \mathbb{C}^N$:

$$\begin{array}{llcl} (a) \text{ Verschiebung im Zeitbereich:} & (y_{k+n})_k & \xrightarrow{DFT} & (w^{kn} c_k)_k, \\ (b) \text{ Verschiebung im Frequenzbereich:} & (w^{kn} y_k)_k & \xrightarrow{DFT} & (c_{k-n})_k. \end{array}$$

189) Gesucht ist das (eindeutig bestimmte) trigonometrische Polynom

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

von minimalem Grad n, welches im Intervall $[0, 2\pi]$ an den drei Stützstellen $t_j = \frac{2\pi j}{3}$, für $j = 0, 1, 2$, die vorgegebenen Funktionswerte $f(t_j) = y_j$ annimmt:

$$y_0 = 0, \quad y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wie lautet das trigonometrische Polynom in der Sinus-Cosinus-Form?

190) Seien $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ und $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{C}^N$ ihre Spektralwerte. Außerdem bezeichne $(x_k)_k$ die N-periodische Fortsetzung des Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ sowie $w = e^{2\pi i/N}$. Zeigen Sie, daß für die sogenannte *periodische Faltung* gilt:

$$\mathbf{y} * \mathbf{z} := \left(\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} y_\ell z_{k-\ell} \right)_k \xrightarrow{DFT} (c_k \cdot d_k)_k$$

191) Berechnen Sie die Spektralkoeffizienten des N-periodischen diskreten Rechteckimpulses $(x_k)_k$ mit $x_0 = x_{N-1} = 1$ und $x_j = 0$ für $j = 1, 2 \ldots, N-2$.

192) Man berechne die Spektralkoeffizienten c_k, $0 \le k \le N-1$, für die diskrete Rechteckfunktion $\vec{y} = (y_0, \ldots, y_{N-1})^T$, wobei $N = 2M$ als gerade vorausgestzt wird, mit

$$y_j = \begin{cases} 1, & 0 \le j \le \frac{N}{2} - 1, \\ 0, & \frac{N}{2} \le j \le N-1. \end{cases}$$

193) Sei N durch 3 teilbar, also $N = 3M$. Man berechne die Spektralkoeffizienten c_k, $0 \le k \le N-1$, für die diskrete N-periodische Funktion, welche durch den Vektor $\mathbf{y} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 1, 0, 0)$ beschrieben wird.

194) Man gebe explizit die Fourier-Matrix F_4 und deren Inverse F_4^{-1} zur Diskreten Fourier-Transformation mit $N = 4$ an. Insbesonder führe man damit für den Vektor

$$\vec{f} = (10, 2, 4, 16)^T$$

die DFT und anschließend die IDFT durch.

195) Führen Sie für $\mathbf{y} = (0, 1, 2, 3)$ die FFT explizit durch.

196) Man betrachte die diskrete N-periodische Funktion, welche durch den Vektor $\vec{y} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots, 1, 0, 0)^T$ beschrieben wird, wobei N durch 3 teilbar sein muß, also $N = 3M$ mit $M \in \mathbb{N}$ gilt. Man berechne nun die Spektralkoeffizienten c_k, mit $0 \le k \le N-1$, von $\vec{y}$.

197) Berechnen Sie das Produkt der beiden Polynome $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ und $q(x) = 4x^3 + x^2 + 2x + 3$ mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation.

198) Wie verläuft die Multiplikation der Polynome $p(x) = 4 - 4x$ und $q(x) = 6 + 2x$ mit Hilfe der Diskreten Fourier-Transformation?
Anleitung: Man repräsentiere $p(x)$ und $q(x)$ durch Vektoren in $\mathbb{C}^4$ und berechne deren Faltung mittels Diskreter Fourier-Transformation mit $N = 4$.

199) Unter der generellen Voraussetzung, daß $f(t)$ absolut integrierbar ist, zeige man folgende Rechenregeln für die Fourier-Transformation ($F(\omega)$ bezeichne die Fourier-Transformierte von $f(t)$).

(a) Streckung: Für $c \neq 0$ gilt:

$$\mathcal{F}\{f(ct)\} = \frac{1}{|c|} F\Big(\frac{\omega}{c}\Big).$$

(b) Differentiation im Zeitbereich: Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar und ist weiters $f'(t)$ Fourier-transformierbar, so gilt:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega).$$

200) Unter der generellen Voraussetzung, daß $f(t)$ absolut integrierbar ist, zeige man folgende Rechenregeln für die Fourier-Transformation ($F(\omega)$ bezeichne die Fourier-Transformierte von $f(t)$).

(a) Streckung: Für $c \neq 0$ gilt:

$$\mathcal{F}\{f(ct)\} = \frac{1}{|c|} F\Big(\frac{\omega}{c}\Big).$$

(b) Verschiebung im Zeitbereich:

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-i\omega a} F(\omega), \quad \text{für } a \in \mathbb{R}.$$

201) Für die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ beweise man folgende Rechenregeln (falls f absolut integrierbar ist und $\mathcal{F}(f(t)) = \hat{f}(\omega)$):

$$(a)\ \overline{f(t)} \to \overline{\hat{f}(-\omega)}, \quad (b)\ f(ct) \to \frac{1}{|c|}\hat{f}\Big(\frac{\omega}{c}\Big),\ c \neq 0, \quad (c)\ f(t-\alpha) \to e^{-i\omega\alpha}\hat{f}(\omega),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

202) Berechnen Sie die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

203) Berechnen Sie die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

204) Man berechne die Fourier-Transformierte $\hat{f}(\omega)$ für den Abklingvorgang (einseitig abfallender Impuls)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-\delta t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Man zeige, dass $\hat{f}(\omega)$ (als Kurve mit dem Paramter $\omega \geq 0$) einen Halbkreis in der komplexen Ebene um den Mittelpunkt $\frac{1}{2\delta}$ mit Radius $\frac{1}{2\delta}$ beschreibt.

205) Man berechne die Spektralfunktion $\hat{f}(\omega)$ für den Dreiecksimpuls

$$f(t) = \begin{cases} C(1+\frac{t}{T}), & -T < t < 0, \\ C(1-\frac{t}{T}), & 0 \leq t < T, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

206) Zeigen Sie: Falls $f(t)$ eine gerade Funktion ist, dann kann die Fouriertransformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ durch

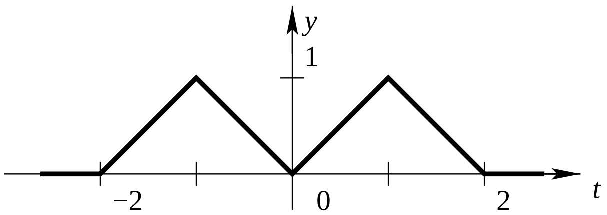
$$F(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)\,dt$$

berechnet werden.

207) Man zeige: falls $f(t)$ eine ungerade Funktion ist, also $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dann kann die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ wie folgt berechnet werden:

$$F(\omega) = -2i\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)dt.$$

208) Unter Berücksichtigung von Beispiel 206 berechne man die Fouriertransformierte für die im Buch auf Seite 385 skizzierte Zeitfunktion $y = f(t)$:



209) Man zeige: falls $f(t)$ eine ungerade Funktion ist, also $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dann kann die Fourier-Transformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ wie folgt berechnet werden:

$$F(\omega) = -2i\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)dt.$$

210) Man löse mit Hilfe der Fourier-Transformation folgende Integralgleichung vom Fredholm-Typ für $x(t)$:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-|t-\tau|}x(\tau)d\tau = \frac{1}{1+t^2}.$$

211) Man bestimme die Laplacetransformierten der folgenden Funktionen.

(a) e^{6t+2}

(b) $f(t) = 1 + 2t + 3t^2$

212) Man bestimme die Laplacetransformierten der folgenden Funktionen.

(a) $f(t) = \int\limits_0^t \tau\sin(\tau)\,d\tau$

(b) $f(t) = \sin^3(t)$
Anleitung: Man bestimme Konstanten a, b, sodaß $\sin^3(t) = a\sin(3t) + b\sin(t)$ mit Hilfe der Summensätze oder der Moivre-Formeln.

213) Man bestimme die Laplace-Transformierten der folgenden Funktionen:

(a) $f(t) = 1{+}2t{+}3t^2$, (b) $g(t) = e^{4+5t}$, (c) $h(t) = e^{i\omega t}$, $h_1(t) = \cos(\omega t)$, $h_2(t) = \sin(\omega t)$.

214) Man beweise folgende Skalierungseigenschaft der Laplace-Transformation:

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{s}{a}\right)$$

und berechne die Laplace-Transformierten folgender Funktionen:

(a) $t\cos(6t)$,

(b) $t^2\cos(7t)$.

215) . Beweisen Sie die beiden Verschiebungssätze

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(s+a) \qquad s\text{-Verschiebung}$$

und

$$\mathcal{L}(f(t-a)\sigma(t-a)) = e^{-as}F(s) \qquad t\text{-Verschiebung},$$

wobei σ die Sprung- oder Heavisidefunktion bezeichnet.

216) Man zeige mittels partieller Integration, dass

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0_+)$$

gilt, wobei $F(s)$ die Laplace-Transformierte von $f(t)$ bezeichnet und $f(0_+)$ für den rechtsseitigen Grenzwert steht. (Die Funktionen $f(t)$ und $f'(t)$ seien Laplace-Transformierbar und $f(t)$ sei stetig auf $\mathbb{R}^+$.)
Durch vollständige Induktion gewinne man daraus die entsprechende Regel für die höheren Ableitungen $\mathcal{L}(f^{(n)}(t))$.

217) Zu welcher Funktion ist $F(s) = \frac{1}{(1+as)(1+bs)}$ Laplace-Transformierte? Man löse diese Aufgabe sowohl mittels (a) Partialbruchzerlegung als auch mittels (b) Faltung.

218–219) Lösen Sie folgende AWP mittels Laplacetransformation.

218)

$$y'' + 3y' + 2y = 6e^{-x}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5.$$

219)

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 6\sinh 2x, \qquad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 4.$$

220) Man löse mit Hilfe der Laplace-Transformation die folgende partielle Differentialgleichung unter den vorgegebenen Nebenbedingungen:

$$xu_x + u_t = xt, \quad u(0,t) = 0 \text{ für } t \geq 0, \quad u(x,0) = 0 \text{ für } x \geq 0.$$

Anleitung: Die Laplace-Transformation bezüglich t liefert für $U(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$xU_x + sU = \frac{x}{s^2}.$$

Lösen dieser Differentialgleichung und Berücksichtigen der Anfangswerte liefert nach der Rücktransformation die gesuchte Lösung.

221–222) Berechnen Sie die folgenden Faltungsprodukte und ihre Laplacetransformierten.

221)

(a) $1 * 2$

(b) $e^t * e^{2t}$

222)

(a) $\sin t * \cos 2t$

(b) $u(t-1) * t$

Mit $u(t)$ wird die Heavisidefunktion bezeichnet.

223) Man löse die Integralgleichung:

$$x(t) = t^2 + \int_0^t x(y)\sin(t-y)dy.$$

224) Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformierten die folgende Differential-Integralgleichung.

$$\dot{x}(t) + \int_0^t x(\tau)\cosh(t-\tau)\,d\tau = 0, \quad x(0) = 1.$$

Bemerkung: $\cosh(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$

225) Man löse mit Hilfe der L-Transformation folgendes AWP (lineare Dgl. mit nichtkonstanten Koeffizienten):

$$y'' + ty' - y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1.$$

Anmerkung: Durch die L-Transformation erhält man im Bildbereich eine lineare Dgl. 1. Ordnung. Die in der allgemeinen Lösung auftretende Konstante bestimme man dadurch, daß $Y(s)$ die Laplace-Transformierte der L-transformierbaren Fkt. $y(t)$ sein soll und daher $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$ gelten muß.

226) Zeigen Sie: Ist $f(t)$ eine periodische Funktion mit Periode p, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $f(t+p) = f(t)$, dann gilt

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\,dt$$

Hinweis: Verwenden Sie $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{np}^{(n+1)p} f(t)e^{-st}\,dt$ und substituieren Sie in geeigneter Weise.

227) Man berechne folgende Laplace-Urbilder:

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s+3}{s(s-1)(s+2)}\right)$.

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s-1}{s^2+2s-8}\right)$.

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3s+7}{s^2-2s+5}\right)$.

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-7s}}{(s+3)^3}\right)$.

228) Man löse das AWP

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, \quad y(0) = -9,\ y'(0) = 6$$

(a) mittels Ansatzmethode,

(b) mittels Laplace-Transformation.

229) Man löse das AWP

$$y'' - 8y' + 16y = e^{3x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

(a) mittels Ansatzmethode,

(b) mittels Laplace-Transformation.

230) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + 3y = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0,$$

(a) mit Hilfe der Ansatzmethode,

(b) mit Hilfe der Laplace-Transformation.

231) Man bestimme die Lösung des folgenden linearen Anfangswertproblems mittels Laplace-Transformation:

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 6\sinh(2x), \quad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 4.$$

232) Man betrachtet einen RLC-Reihenschwingkreis unter konstanter Spannung $U(t) =$ 300 Volts. Die Werte sind dabei $R = 160$ Ohms für den Widerstand, $L = 2$ Henry für die Induktivität und $C = 0.02$ Farad für die Kapazität. Man schreibe die entsprechende Differentialgleichung 2. Ordnung für die Ladung $Q(t)$ und löse sie mit Hilfe der Laplace-Transformation (Strom und Ladung sind bei $t = 0$ als null anzunehmen). Man zeichne anschliessend den Strom $j(t)$ für $t \geq 0$.

233) Man löse Beispiel 232, wenn der Schwingkreis von der oszillierenden Spannung $U(t) = 100\sin(3t)$ angeregt wird. Man zeige somit, dass sich der Strom $j(t)$ für grosse Zeiten annähernd wie die oszillierende Funktion $A\sin(3t+\phi)$ verhält, wo A und ϕ zu bestimmen sind.

234–237) Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben mit Hilfe der Laplacetransformation.

234)

$$xy'' + y' + 2xy = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Bemerkung: Die Formel $\mathcal{L}(J_0(at)) = 1/\sqrt{z^2 + a^2}$ darf ohne Beweis verwendet werden.

235)

$$\begin{aligned} y_1' + 2y_2 &= e^x \\ y_2' + 2y_1 &= e^{-x} \end{aligned} \qquad y_1(0) = y_2(0) = 0$$

236)

$$\begin{aligned} y_1'' + y_2' + 3y_1 &= 1 \\ y_2'' - 4y_1' + 3y_2 &= 0 \end{aligned} \qquad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1'(0) = y_2'(0) = 0$$

237)

$$y'' + 4y = f(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ für } 0 < t \leq \pi \\ 0 \text{ für } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

und periodischer Fortsetzung, also $f(t + 2\pi) = f(t)$.

238) Zeigen Sie, daß die Laplacetransformierte $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq t < \log\log 3 \\ (-1)^n e^{e^t/2} & \text{für } \log\log n \leq t < \log\log(n+1) \end{cases}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ existiert. $F(s)$ muß nicht berechnet werden.
Bemerkung: $\log x$ bezeichnet den natürlichen Logarithmus von x.
Hinweis: Spalten Sie das Laplace-Integral in geeigneter Weise auf, sodaß eine Reihe entsteht, auf die das Leibnizkriterium anwendbar wird.

239) Man bestimme die Urbilder $f(t)$ der angegebenen Laplace-Transformierten $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$:

(*a*) $F(s) = \ln \frac{s^2+1}{(s-1)^2}$,

(*b*) $F(s) = \frac{e^{-2s} - e^{-4s}}{s}$.

Anmerkung: Man beachte $-\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}\{tf(t)\}$ resp. betrachte die Laplace-Transformierte der Heavisidefunktion.

240) Man verwende die Methode der erzeugenden Funktionen zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differenzengleichung erster Ordnung $x_{n+1} - x_n + 5 = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

241) Man finde die Lösung der Differenzengleichung zweiter Ordnung $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n$ zu den Anfangsbedingungen $x_0 = 2$ und $x_1 = 5$ mit Hilfe der Methode der erzeugenden Funktionen.

242–255) Lösen Sie die Rekursion mit Hilfe von erzeugenden Funktionen:

242) $a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1$.

243) $a_n = 2a_{n-1} + 2^{2n-2}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 5$.

244) $a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

245) $a_n = 5a_{n-1} + 2^{n-1} - 6n5^n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

246) $a_n = 2a_{n-1} + (1+2^n)^2$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

247) $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 1 + \sin(2n)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = -1$.

248) $a_n - a_{n-1} + 2a_{n-2} = 1 + \cos(2n)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2$.

249) $a_n - a_{n-2} = \sin(n)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 7$, $a_1 = -12$.

250) $2a_n - 7a_{n-1} + 6a_{n-2} = (n^2 + 3n - 4)3^n$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 10$, $a_1 = -7$.

251) $2a_n - 7a_{n-1} + 6a_{n-2} = (3n - 10)2^{n+2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

252) $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} = 1$ $(n \geq 3)$, $a_0 = 3$, $a_1 = a_2 = -1$.

253) $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = n^2 2^n$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.

254) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^{2n-2} - n^2 5^{n+3}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

255) $a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 2^n - 3(-1)^n$ $(n \geq 3)$, $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

256) Man löse das System von Rekursionen $a_{n+1} = 2a_n + 4b_n$, $b_{n+1} = 3a_n + 3b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = b_0 = 1$ unter Benützung erzeugender Funktionen.

257) Man löse das System von Rekursionen $a_{n+1} = 3a_n + 5b_n$, $b_{n+1} = 4a_n + 4b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = b_0 = 2$ unter Benützung erzeugender Funktionen.

258) Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$. Man drücke mit Hilfe von $A(x)$ und $A(-x)$ die erzeugende Funktion $A_g(x) = \sum_{k\geq 0} a_{2k} x^{2k}$ aus.

259) Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$. Man drücke mit Hilfe von $A(x)$ und $A(-x)$ die erzeugende Funktion $A_u(x) = \sum_{k\geq 0} a_{2k+1} x^{2k+1}$ aus.

260) Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ und $b_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Man drücke $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ mit Hilfe von $A(x)$ aus.

261) Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ und $b_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$. Man drücke $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ mit Hilfe von $A(x)$ aus.

262–265) Man bestimme die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$:

262) $a_n = n^2 + 2^n$

263) $a_n = n + n3^n$

264) $a_n = n(n-1) + (-1)^n$

265) $a_n = n(-1)^n + 2^{-n}$

266–267) Man bestimme mit Hilfe erzeugender Funktionen:

266) $s_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)$

267) $s_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$

268) Man löse die Differentialgleichung $y' = \frac{x}{x-y}$ mit der Isoklinenmethode.

269) Man bestätige, dass die Funktionen

$$N(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-rt}}, \; C \in \mathbb{R}, \quad \text{sowie} \quad N = 0$$

Lösungen der logistischen Differentialgleichung $N'(t) = rN(1 - \frac{N}{K})$ sind. Man berechne und skizziere jene Lösungsfunktion, welche die Anfangsbedingung $N(0) = \frac{K}{10}$ erfüllt.

270) Man stelle zu der Kurvenschar

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$$

mit dem „Scharparameter“ c eine Differentialgleichung auf, welche alle Funktionen der Schar als Lösungskurven besitzt.

271) Man bestimme die Differentialgleichung der Kurvenscharen $x^2 + y^2 = C$ und $y = Ce^{x/C}$.

272) Man betrachte die Kurvenschar $\Phi(x, y, C) = y - Cx^2 - C^2$, $C \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie eine implizite Differentialgleichung erster Ordnung, die diese Kurvenschar als allgemeine Lösung besitzt.

(b) Weisen Sie nach, daß die Einhüllende dieser Kurvenschar ebenfalls Lösung dieser Differentialgleichung ist. Die Einhüllende erhält man durch Elimination von C aus den Gleichungen

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial C}\Phi(x, y, C) = 0$$

273) Man beweise das Lemma von Gronwall: Sei $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weiters gelte für alle $x \in [a, b]$ die Ungleichung

$$0 \leq \phi(x) \leq C + L \int_a^x \phi(t)\, dt$$

mit $C, L \geq 0$. Dann gilt für alle $x \in [a, b]$

$$\phi(x) \leq Ce^{L(x-a)}.$$

274) Man beweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes:
Ist $f : G \to \mathbb{R}$ stetig partiell nach y differenzierbar, dann genügt f in jedem Rechteck $R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, das ganz in G liegt, einer L-Bedingung (bezüglich y) mit L-Konstanten $L = \max\{|f_y(x, y)| : (x, y) \in R\}$.

275) Man zeige, daß die Funktion $f(x, y) = 5|\cos(\pi y)| + x^2$ in $G = \mathbb{R}^2$ einer L-Bedingung genügt und gebe eine L-Konstante an.

276) Bestimmen Sie die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y' = y.$$

Für welche Anfangswerte von (x_0, y_0) ist das zugehörige AWP $y(x_0) = y_0$ nicht oder nicht eindeutig lösbar? Welche Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes sind dabei verletzt?

277) Für welche Werte von y_0 ist das AWP $\quad xy' + 2y = 3x, \quad y(0) = y_0$ lösbar?
Geben Sie für diese Werte jeweils die Lösung an.

278) Vom neuesten Modell eines Mobiltelefonproduzenten werden im Weihnachstgeschäft 3000 Stück abgesetzt, nach 12 Monaten sind davon nur mehr 2820 Stück in Betrieb. Unter der Annahme, daß die monatliche Ausscheidungsrate proportional zur Nutzungsdauer ist, bestimme man die Anzahl $y(t)$ der in Betrieb stehenden Mobiltelefone (von den ursprünglich 3000 Stück) in Abhängigkeit von ihrer Verwendungsdauer t, sowie die längste Nutzungsdauer.

279–288) Man löse die folgenden Differentialgleichungen:

279) $4x\, dy - y\, dx = x^2\, dy$

280) $(1 + 2y)\, dx - (4 - x)\, dy = 0$

281) $\cos y\,dx + (1-e^{-x})\sin y\,dy = 0$ (für $x=0$ sei $y=\pi/2$)

282) $y' - y\tan x = 0$

283) $xy' + y = x^2 + 3x + 2$

284) $y' + y\cos x = \sin x\cos x,\ y(0) = 1$

285) $y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$

286) $y'' - 3y' - 4y = 2x$

287) $y''' - 7y' + 6y = 1$

288) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$

289–292) Man löse die exakten Differentialgleichungen.

289) $(x+y+1)\,dx - (y-x+3)\,dy = 0$

290) $(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1)\,dx + (x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y)\,dy = 0$

291) $(4x^3y^3 + \frac{1}{x})\,dx + (3x^4y^2 - \frac{1}{y})\,dy = 0$

292) $\big(\cos y + y\cos x\big) + \big(\sin x - x\sin y\big)y'(x) = 0$

293–296) Man löse die Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen.

293) $4x\,dy - y\,dx = x^2\,dy$

294) $(1+2y)\,dx - (4-x)\,dy = 0$

295) $\cos y\,dx + (1-e^{-x})\sin y\,dy = 0$ (für $x=0$ sei $y=\pi/2$)

296) $y' = y\sin x$

297–301) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bzw. die Lösung der Anfangswertaufgabe:

297) $y - xy' + 1 = 0$

298) $y' + \frac{1}{1-x}y = x^2,\ \ y(0) = 1$

299) $y' + \frac{1}{1+2x}y = 2x - 3,\ \ y(0) = 2$

300) $y' = \sin^2 x\cos^2 y$

301) $xy' = y\ln\frac{y}{x}$

302–303) Man löse mittels integrierendem Faktor:

302) $(x-y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0,\ M = x^{-2}.$

303) $y(3-5x^2y)\,dx + x(2-3x^2y)\,dy = 0,\ M = x^2y.$

304–307) Man löse die homogenen Differentialgleichungen.

304) $(2x+3y)\,dx + (y-x)\,dy = 0.$

305) $(x\sin\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x})\,dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0.$

306) $(x^2+y^2)\,dx + xy\,dy = 0$ (für $x=1$ sei $y=-1$).

307) $(x\sqrt{x^2+y^2} - y)\,dx + (y\sqrt{x^2+y^2} - y)\,dy = 0.$

308–311) Man löse die folgenden speziellen Differentialgleichungen.

308) $y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\ln x}{x}y^2$.

309) $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

310) $y' = y^2 + (1-2x)y + (1-y+x^2) \quad (y_1 = x)$.

311) $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1 \quad (y_1 = -x^{-1})$.

312–316) Man löse die folgenden Differentialgleichungen mittels spezieller Ansätze.

312) $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$. Ansatz: $y = x^r$.

313) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$. Ansatz: $y(x) = x^r$.

314) $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$. Ansatz: $y = x^r$.

315) $x^2y'' - xy' - 3y = x$. Ansatz für $y_h(x)$: $y = x^r$. Zur Bestimmung von $y_p(x)$ versuchen Sie die Standardansätze.

316) $x^2y'' + xy' - 3y = 5x^2$. Ansatz für $y_h(x)$: $y = x^r$. Zur Bestimmung von $y_p(x)$ versuchen Sie die Standardansätze.

317) Man ermittle alle Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y^2-4}{x}$$

durch Trennung der Variablen und anschließender Partialbruchzerlegung.

318) Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^x\right)dx + \left(y + e^x\right)dy = 0.$$

Hinweis: Die Gleichung kann mit Hilfe eines integrierenden Faktors in eine exakte Gleichung transformiert werden.

319) Man löse die Bernoulli'sche Differentialgleichung

$$xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0.$$

320) Durch die Transformation $y(x = z(\ln x)$ und Rückführung auf eine lineare Differentialgleichung bestätige man, dass die allgemeine Lösung der nachstehenden Euler'schen Differentialgleichung

$$x^2y'' - 6y = 12\ln x$$

durch

$$y(x) = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \frac{1}{3}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = \frac{2}{3}$, $y'(1) = -1$?

321) Das Wachstum einer Population der Größe $N(t)$ zur Zeit t werde durch die Differentialgleichung

$$\frac{dN}{dt} = r(K-N) \quad \text{mit} \quad N(0) = N_0$$

beschrieben. Dabei sind r und K positive Parameter. Man löse die Differentialgleichung (a) durch Bestimmung der homogenen Lösung und Variation der Konstanten bzw. (b) durch

Auffinden einer partikulären Lösung für die inhomogene Gleichung mittels eines konstanten unbestimmten Ansatzes $N_p(t) = A$. Ferner skizziere man den Graphen der Lösungsfunktion für $r = 0.08$ und $K = 1000$.

322) Ein RCL-Schwingkreis besteht aus einer Induktivität L von 0.05 Henry, einem Widerstand R von 20 Ohm, einem Kondensator C von 100 Mikrofarad sowie einer elektromotorischen Kraft ("Batterie") von $E = E(t) = 100\cos(200t)$, die in Reihe geschaltet sind. Bestimme den Strom $i = i(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ unter der Anfangsbedingung $i(0) = 0$ und der Bedingung, daß für die Ladung $q(t) = \int_{\tau=0}^{t} i(\tau)d\tau$ gilt mit $q(0) = 0$. Wählen Sie zur Lösung der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten die Ansatzmethode.
Anleitung: Es gilt $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{\tau=0}^{t} i(\tau)d\tau = E(t)$.

323) Ein elektrischer Schwingkreis enthält einen Widerstand R mit 8 Ohm, der mit einer Induktion L von 0.5 Henry und einer Batterie von $E = E(t)$ Volt in Reihe geschaltet ist. Bei $t = 0$ ist der Strom gleich Null. Berechne den Strom $I = I(t)$ zu einer beliebigen Zeit $t > 0$ und den maximalen Strom, wenn

1. $E = E(t) = 64$,
2. $E = E(t) = 32e^{-8t}$.

Hinweis: Es muß gelten, daß die Summe der Spannungsabfälle im Schwingkreis = 0 ist (Batterie: negativer Abfall). Der Spannungsabfall beim Widerstand ist RI und bei der Induktion $L\frac{dI}{dt}$.

324) Ein Tank enthält 100 Liter Wasser. Eine Salzlösung, die 0.5 kg Salz pro Liter enthält, fließt mit der Rate von 3 Liter pro Minute ein und die gut umgerührte Mischung fließt mit derselben Rate aus.

1. Wieviel Salz ist zu einer beliebigen Zeit in dem Tank?
2. Wann enthält der Tank 25 kg Salz?

325) Ein Tank enthält 400 Liter Wasser. Eine Salzlösung, die 0.4 kg Salz pro Liter enthält, fließt mit der Rate von 20 Liter pro Minute ein und die gut umgerührte Mischung fließt mit der Rate von 12 Liter pro Minute aus. Wieviel Salz enthält der Tank nach einer Stunde ?

326) Man berechne alle möglichen Gleichgewichtszustände der nichtlinearen Differentialgleichung

$$y' = y\left(4\frac{y}{y+1} - 0.5y - 1\right)$$

und überprüfe sie auf Stabilität.

327) Man berechne alle möglichen Gleichgewichtszustände der nichtlinearen Differentialgleichung

$$y' = \left(\frac{8y}{y+1} - y - 1\right)y$$

und überprüfe sie auf Stabilität.

328) Man untersuche auch das globale Lösungsverhalten für die Lösungen der Differentialgleichung aus Beispiel 327 in der (y, y')-Phasenebene.

329) Die Legendre-Dgl. besitzt die Gestalt

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten im folgenden den Fall $m = 1$. Durch Nachrechnen bestätigt man sofort, daß $y(x) = x$ eine Lösung der Gleichung ist. Ermitteln Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = C(x)x$ eine zweite, unabhängige Lösung der Differentialgleichung. Wie sieht die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus?

330) Man betrachte die homogene Eulersche Differentialgleichung

$$x^2y'' + 3xy' + y = 0.$$

Ermitteln Sie mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = x^r$ eine Lösung $\phi_1(x)$. Eine zweite, unabhängige Lösung $\phi_2(x)$ bestimme man mittels Reduktionsansatz $y(x) = u(x)\phi_1(x)$. Beweisen Sie auch die Unabhängigkeit von $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$.

331) Man betrachte die inhomogene Eulersche Differentialgleichung

$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x}.$$

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.
Hinweis: Aus Beispiel 330 erhält man als Basis des Lösungsraums der homogenen Gleichung $\{\frac{1}{x}, \frac{\log x}{x}\}$.

332–333) Lösen Sie folgende Systeme von Differentialgleichungen, indem Sie diese durch geeignetes Einsetzen auf lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung zurückführen.

332)

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 - y_2 + t \\ y_2' &= y_1 - y_2 + t^2 \end{aligned} \qquad y_1(0) = -\frac{3}{8}, \quad y_2(0) = \frac{1}{8}$$

333)

$$\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 + 4y_3 \\ y_2' &= 8y_1 + 3y_2 + 8y_3 \\ y_3' &= -8y_1 - 5y_3 \end{aligned}$$

Hinweis: Beachten Sie, daß die erste und dritte Gleichung unabhängig von der zweiten sind.

334) Man betrachte das folgende System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung für $x_1(t), x_2(t)$ mit vorgegebenen Anfangswerten:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 5x_2 + 1, \qquad & x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2 &= 5x_1 + x_2, \qquad & x_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Man löse nun dieses System auf folgende Weise (Eliminationsmethode). Zuerst eliminiere man x_2 aus dem Gleichungssystem: Ableiten von

$$x_2 = \frac{-\dot{x}_1 + x_1 + 1}{5}$$

und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert für x_1 eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Man bestimme die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung für x_1 und danach durch Rücksubstitution auch die allgemeine Lösung für x_2. Anpassen an die Anfangsbedingungen liefert schließlich die gesuchte Lösung.

335) Man finde eine Lösung $u(x, y) = f(x)$ von $u_{xx} - u_y = 6x$ und eine Lösung $u(x, y) = g(y)$ von $u_{xx} - u_y = -2y$. Man ermittle mit Hilfe des Superpositionsprinzips eine Lösung von

$$u_{xx} - u_y = 18x + 8y.$$

336) Man löse die partielle Differentialgleichung $au_x + bu_y = 1$ und zeige, dass die Lösung (für $a \neq 0$) in der Form

$$u(x,y) = \frac{1}{a}x + C\big(y - \frac{b}{a}x\big)$$

geschrieben werden kann, wo $C = C(t)$ eine beliebig gewählte, differenzierbare Funktion in einer Variablen ist. Wie lautet die Lösung zur Anfangsbedingung $u(x=0,y) = y^2 + 1$?

337–348) Man löse die folgenden partiellen Differentialgleichungen.

337) $u_{xx} + u_x + x + y = 1$

338) $u_{xy} + u_x + x + y = 1, \qquad u(x,0) = 0, u(0,y) = 0.$

339) $u_{xy} + yu_x = 0, \qquad u(x,x) = x^2, u_x(x,x) = u_y(x,x).$

340) $xu_x - 2xu_y = u, \qquad u(1,y) = y^2.$

341) $(1+x)u_x - (1+y)u_y = 0$

342) $yu_x - xu_y = y^2 - x^2$

343) $xyu_x + u_y = xy\cos(x)$

344) $x^2u_x + yu_y + xyu = 1$

345) $3u_x + 2u_y - xyu = 0$

346) $u_x + 9u_y - xu = x$

347) $x^2u_x - 2u_y - xu = x^2$

348) $u_x + u_y - u = x$

349) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen.

(a) $xu_x + 2yu_y = 0.$

(b) $xu_x - 2yu_y + u = e^x.$

(c) $xu_x - xyu_y - u = 0.$

(d) $yu_x - 4xu_y = 2xy.$

350) Bestimmen Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichungen aus Beispiel 349 mit folgenden entsprechenden Bedingungen.

(a) $u(x, 1/x) = x.$

(b) $u(1,y) = y^2.$

(c) $u(x,x) = x^2e^x.$

(d) $u(x,0) = x^4.$

351) Gegeben sei die folgende partielle Differentialgleichung:

$$xu_x + 2yu_y = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung, welche die folgende Bedingung erfüllt:

$$u\big(x, \frac{1}{x}\big) = x.$$

352) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Rumpf-Differentialgleichung:

$$\frac{u_x}{x} + \frac{u_y}{y} + \frac{u_z}{z} = 0.$$

353–355) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen.

353) $9u_{xx} - \frac{1}{4}u_{yy} = \sin x$.

354) $12u_x + 4u_y = x$.

355) $u_{xx}^2 + u_{yy}^2 = 0$ (nur reelle Lösungen.)

356) Zeigen Sie, daß zum Lösen der partiellen Differentialgleichung

$$au_x + bu_y + cu_z = f(x, y, z), \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

die Substitution

$$\xi = x, \qquad \eta = bx - ay, \qquad \zeta = cx - az$$

zum Ziel führt. Bestimmen Sie damit die allgemeine Lösung der PDG

$$2u_x + 3u_y + 4u_z = e^{x+y+z}.$$

357) Man finde die allgemeine Lösung $u(x, y, z, t)$ der Differentialgleichung

$$u_t = u_x + 2u_y - u_z.$$

Welche Lösung erfüllt $u(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 + z^2$?

358) Eliminieren Sie mit Hilfe der Substitution $u(x, y) = v(x, y)e^{\lambda x + \mu y}$ und geeignete Wahl von λ und μ die ersten Ableitungen aus der PDG

$$u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0.$$

Bemerkung: Die entstehende PDG müssen Sie nicht lösen.

359) Wie 358 für die PDG

$$u_{xy} = \alpha u_x + \beta u_y.$$

360) Man bestimme die allgemeine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$xu_x - yu_y = xy.$$

361) Man bestimme die allgemeine Lösung der Rumpf-Differentialgleichung

$$u_x + (y + 2z)u_y + zu_z = 0.$$

362) Man betrachte folgendes System von partiellen Differentialgleichungen für $z = z(x, y)$:

$$yz_x - xz_y = 0, \quad z_{xy} = 0.$$

Man bestimme nun alle Funktionen $z(x, y)$, welche dieses System lösen.
Anleitung: Man bestimme für eine der beiden partiellen Differentialgleichungen die allgemeine Lösung und setze in die andere Gleichung ein.

363) Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden linearen partiellen Differentialgleichung für $u(x, y)$:

$$(x^2 + 1)u_x - 2xyu_y + 2xu + 1 = 0.$$

364) Eine Funktion $u(x, y)$ heißt *homogen* vom Grad n, wenn

$$u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n u(x, y)$$

für alle $\lambda > 0$ und x, y gilt. Durch Differenzieren dieser Beziehung nach λ zeige man: falls u eine stetig differenzierbare Funktion ist, genügt sie der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$xu_x + yu_y = nu.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung?

365) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$yz_x - xz_y + xyz = 0$$

sowie jene Lösung, die die Parabel $z = y^2$ der yz-Ebene enthält.

366) Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden quasilinearen Differentialgleichung für $u(x, t)$ (konservative Burgers-Gleichung):

$$u_t + uu_x = 0.$$

367) Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden quasilinearen Differentialgleichung für $u(x, y)$:

$$(x + u)u_x + (y + u)u_y + u = 0.$$

Anleitung: Die durch den Ansatz $f(x, y, u) = \text{const}$ erhaltene Rumpf-Differentialgleichung

$$(x + u)f_x + (y + u)f_y - uf_u = 0$$

führt zum System von Phasen-Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{du} = -\frac{x + u}{u}, \quad \frac{dy}{du} = -\frac{y + u}{u},$$

welche beide über die Substitution $v = \frac{x}{u}$ bzw. $v = \frac{y}{u}$ implizit gelöst werden können.

368) Lösen Sie das AWP

$$u_t + u^2 u_x = 0, \qquad u(x, 0) = f(x).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß eine implizite Lösung der Form $u = f(x - tg(u))$ existiert.

369–376) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen

369) $uu_x + u^2 u_y - z = 0$

370) $yu_x - xu_y = y^2 - x^2$

371) $u_x + 3u_y = u^2$

372) $x^2 u_x + uu_y = 1,\ u(x, 1 - x) = 0,\ x > 0$

373) $u_x + y^2 u_y = \cos(u)$

374) $u_x - u_y = u^2$

375) $u_x - y^2 u_y = u$

376) $xu_x + u_y = e^u$

377) Man klassifiziere die folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach „hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch“':

(a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0,$

(b) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + u = 0,$

(c) $3u_{xx} - 8u_{xy} + 4u_{yy} - u = 0,$

(d) $u_{xy} + xyu_{yy} + u_y = 0,$

(e) $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0.$

378) Man klassifiziere die folgenden partiellen Differentialgleichungen nach „hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch" und ermittle jeweils eine Normalform:

(a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0,$ (b) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + u = 0,$
(c) $3u_{xx} - 8u_{xy} + 4u_{yy} - u = 0,$ (d) $u_{xy} + xyu_{xx} + u_y = 0.$

379) Man bestimme das Gebiet, in dem die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$$

hyperbolisch ist, und bestimme weiters die Normalform.

380) Bestimmen Sie die Normalform der Differentialgleichung

$$u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y + x + y + 1 = 0.$$

381) Man bringe folgende Gleichung auf Normalform und gebe die allgemeine Lösung an:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

382) Man wähle den Produktansatz $u(x, y) = X(x)Y(y)$ und bestimme damit Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$x^2u_{xy} + 3y^2u = 0.$$

383) Man bestimme alle Lösungen der Form $u(x, y) = X(x)+Y(y)$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$9u_{xx} + u_{yy} = 27u.$$

384) Man betrachte die Temperaturverteilung $u(x, t)$ eines Stabes der Länge ℓ, welche an der Stelle $0 \leq x \leq \ell$ zur Zeit $t \geq 0$ durch die homogene Wärmeleitungsgleichung (mit einer vom Material abhängigen Konstanten $\alpha > 0$) beschrieben werden kann:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}.$$

Man löse nun mit Hilfe des Produktansatzes $u(x, t) = X(x)T(t)$ das folgende Rand-Anfangswert-Problem (für eine vorgegebene Funktion $f(x)$):

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{für } 0 \leq x \leq \ell, \qquad u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad \text{für } t \geq 0.$$

385) Man berechne die Lösung $u(x, t)$ aus Beispiel 384, wenn $\ell = 2$ und die Anfangsbedingung

$$f(x) = x + (2 - 2x)H(x - 1),$$

lautet. (Zeichnen Sie zuerst die antisymetrische 4-periodische Funktion f; H bezeichnet dabei die Heaviside Funktion).

386) Man finde Lösungen der Potentialgleichung $\Delta u = u_{xx}+u_{yy} = 0$ auf einer Kreisschiebe. Dazu transformiere man die Gleichung auf Polarkoordinaten und bestimme Lösungen der transformierten Gleichung mittels eines Produktansatzes. (Anfangs- oder Randbedingungen sind nicht zu berücksichtigen.)

387) Eine Saite, welche eine Schwingungsgleichung mit Parameter $c = 1$ erfülle, sei in $x = 0$ und $x = \pi$ eingespannt und liege zum Zeitpunkt $t = 0$ zur Gänze in der x-Achse. Der Geschwindigkeitszustand zu diesem Zeitpunkt sei durch $u_t = \frac{3}{4}(\sin x + \sin(3x))$ beschrieben. Wie sieht die Gestalt der Saite zu den Zeiten $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ aus? Wie lassen sich diese Ergebnisse interpretieren? (Betrachten Sie dazu auch die Geschwindigkeit in diesen Zeitpunkten)

388) Man diskutiere das Gleitkomma-System $\mathbb{F}(b = 10, n = 4, e_{\min} = -9, e_{\max} = 9)$: Zahlendarstellung, größte Zahl, kleinste positive normalisierte/denormalisierte Zahl, absolute Abstände, Anzahl der Maschinenzahlen in $\mathbb{F}$, relative Maschinengenauigkeit. Ferner zeige man, dass ide größte darstellbare Zahl durch fortlaufende Addition von 1 in $\mathbb{F}$ nicht erreicht werden kann.

389) In der Menge der Maschinenzahlen $\mathbb{F}$ ist die Multiplikation keine assoziative Operation. Man belege diese Aussage durch ein Beispiel.

390) Mit Hilfe der Näherung

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{x f'(x)}{f(x)} \frac{\Delta x}{x}$$

für den relativen Fehler der Funktion $f(x)$ finde man Fehlerschätzungen für die folgenden Rechenoperationen: $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x)$ und $f(x) = \sin(x)$.

391–393) Man bestimme mit Hilfe der Bisektion auf drei Dezimalstellen genau die positive Nullstelle der Funktion $f(x)$ im angegebenen Intervall I:

391) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$, $I = [\pi/2, \pi]$.

392) $f(x) = \cos x - x$, $I = [0, \pi/2]$.

393) $f(x) = (\tan x)^2 - x$, $|x| < \frac{\pi}{4}$

394) Lösen Sie Beispiel 391 mit Hilfe des Newton-Verfahrens und mit Hilfe der Regula falsi.

395) Lösen Sie Beispiel 392 mit Hilfe des Newton-Verfahrens und mit Hilfe der Regula falsi.

396) Lösen Sie Beispiel 393 mit Hilfe des Newton-Verfahrens und mit Hilfe der Regula falsi.

397–398) Bestimmen Sie eine Nullstelle der Funktion $F(x) = x^2 - 1$ im Intervall $[0, 3]$, indem Sie jeweils 3 Schritte der angegebenen Verfahrens durchführen, und vergleichen Sie die Ergebnisse.

397) (a) Bisektion, (b) Regula falsi, (c) Newtonsches Näherungsverfahren (Startwert Intervallende).

398) (a) Iterative Fixpunktbestimmung für $x = f(x) = (x^2 + 3x - 1)/3$ (Startwert Intervallende), (b) iterative Fixpunktbestimmung für $x = g(x) = (1 + 2x - x^2)/2$ (Startwert Intervallende), (c) wählen Sie eine andere Funktion $h(x)$, sodaß die Gleichung $h(x) = x$ äquivalent ist zur Gleichung $F(x) = 0$.

399) Man zeige, daß die Funktion $\varphi(x) = x - e^{-x} + \cos x$ eine kontrahierende Abbildung des Intervalls $[1.2, 1.3]$ in sich ist, und berechne den (einzigen) Fixpunkt x^* dieser Funktion im angegebenen Intervall (Genauigkeit: zwei Nachkommastellen).
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß im angebenen Intervall $f''(x) < 0$ gilt. Was kann man daraus für $f'(x)$ schließen? Benutzen Sie dies, um die Kontraktionseigenschaft zu zeigen!

400) Gesucht ist eine in der Nähe von

$$(a) \quad x_0 = 3, \qquad \text{bzw.} \qquad (b) \quad x_0 = -3$$

gelegenen Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{-x} + x^2 - 10$.

401) Nach welcher Zeit t (in Stunden) erreichen die Betriebskosten

$$B(t) = 10.45t + 0.0016t^2 + 17200\big(1 - e^{-0.0002t}\big)$$

eines Netzwerkrouters den Anschaffunspreis $A = 100.000,-$ € ? Ist die Lösung eindeutig bestimmt?
Anleitung: Man bilde die Funktion $f(t) = B(t) - A$, untersuche deren Monotonieverhalten und bestimme schließlich die gesuchte Nullstelle mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

402) Man zeige, daß $f(x) = x^4 - x - 1$ in $[1, 2]$ eine Nullstelle hat und bestimme diese näherungsweise mit (wenigstens) 4 Schritten der Bisektion und der Regula falsi.

403) Man ermittle für sämtliche Nullstellen der Funktion $f(x) = 3x + 2\sin^2 x + 1$ Näherungen, indem man jeweils 4 Schritte des Newtonverfahrens durchführt.

404) Man bestimme die Lösungsfolge der beim "Babylonischen Wurzelziehen" auftretenden Iteration

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(wobei $a > 0$, $x_0 > 0$ ist) auf graphischem Weg und zeige, daß stets

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq \sqrt{a}$$

gilt, d.h., die Iterationsfolge (x_n) ist ab $n = 1$ monoton fallend und nach unten durch $\sqrt{a}$ beschränkt.

405) Man zeige: Für $a \neq 0$ konvergiert die Iterationsfolge (x_n) gemäß $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$ mit $\frac{1}{2a} < x_0 < \frac{3}{2a}$ gegen den Fixpunkt $x^* = \frac{1}{a}$. Diese Iteration stellt somit ein Verfahren zur Division unter ausschließlicher Verwendung von Multiplikationen dar.

406) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine $m \times n$-Matrix und $\vec{x} = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Unter der zu einer Vektornorm $\|\vec{x}\|$ zugehörigen Matrixnorm oder Operatornorm $\|A\|$ versteht man

$$\|A\| = \sum_{\vec{x}\neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|.$$

Man zeige (mindestens zwei der nachfolgenden drei Behauptungen):

(a) Mit der so genannten Betragssummennorm $\|\vec{x}\| = \sum_i |x_i|$ als Vektornorm erhält man die Spaltensummennorm $\|A\| = \max_j \sum_j |a_{ij}|$ als zugehörige Matrixnorm,

(b) der so genannten Maximumsnorm $\|\vec{x}\| = \max_i |x_i|$ entspricht die Zeilensummennorm $\|A\| = \max_i \sum_i |a_{ij}|$,

(c) zur Euklidischen Norm $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ gehört die Spektralnorm $\|A\|$, d.i. die Wurzel des größten Eigenwerts der Matrix $A^T A$.
Anleitung: Die Matrix $A^T A$ ist, wie man zeigen kann, stets symmetrisch, positiv semidefinit, alle ihre Eigenwerte sind reell und nicht negativ, und es gibt eine Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^n$ aus lauter Eigenvektoren.
Bemerkung: Ist die Matrix A symmetrisch, dann ist die Spektralnorm $\|A\|$ gleich dem betragsmäßig größten Eigenwert von A.

407) Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} -0.35x_1 & +1.5x_2 & +122.2x_3 & = & 126 \\ 105.7x_1 & -440.9x_2 & -173.7x_3 & = & -1285 \\ 21.5x_1 & -101.8x_2 & +33.4x_3 & = & -229 \end{array}$$

mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens (a) ohne Pivotisierung, (b) mit Pivotisierung bei einer Rechengenauigkeit von 4 signifikanten Stellen.

408) Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr} 0.13x_1 & -45.26x_2 & = & -4500 \\ 39.16x_1 & -64.32x_2 & = & 1400 \end{array}$$

mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens (a) ohne Pivotisierung, (b) mit Pivotisierung bei einer Rechengenauigkeit von 4 signifikanten Stellen.

409) Man vergleiche die Lösungen der beiden linearen Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3.9 & -10.7 \\ -9.3 & 25.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -290 \\ 690 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -291 \\ 689 \end{pmatrix}.$$

Was kann daraus geschlossen werden?

410) Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & = & -9 \\ 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 8 \end{array}$$

unter Anwendung des Gesamtschrittverfahrens von Jacobi, wobei man zunächst die einzelnen Gleichungen derart umordne, daß das entstehende System das Zeilensummenkriterium erfüllt.

411) Man bestimme die Lösung des Gleichungssystems aus Beispiel 410) mit Hilfe des Einzelschrittverfahrens von Gauß-Seidel.

412) Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & = & -9 \\ 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 8 \end{array}$$

unter Anwendung des Gesamtschrittverfahrens von Jacobi sowie des Einzelschrittverfahrens von Gauß-Seidel, wobei man zunächst die einzelnen Gleichungen derart umordne, dass das entstehende System das Zeilensummenkriterium erfüllt.

413) Man zeige: Die Anzahl der Punktoperationen zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Unbekannten beträgt

(a) $(n^2-1)n!+n$ bei Anwendung der Cramerschen Regel, (Hinweis: Die Auswertung einer $n \times n$-Determinante erfordert $(n-1)n!$ Multiplikationen.)

(b) $\frac{n}{3}(n^2+3n-1)$ beim Eliminationsverfahren von Gauß,

(c) n^2 pro Schritt für das Iterationsverfahren von Jacobi oder Gauß-Seidel.

414) Die folgende Tabelle gibt die Entwicklung der Weltbevölkerung (in Milliarden) in den Jahren 1950 bis 1990 wieder:

Jahr t	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Bevölkerung $f(t)$	2.5	3	3.6	4.4	5.3	?

Man finde eine Trendfunktion der Form $g(t) = ce^{at}$ und extrapoliere die Bevölkerungszahl für das Jahr 2000.
Hinweis: Man bestimme die Ausgleichsgerade für die Wertepaare $(t, \ln g(t))$ nach der Methode der kleinsten Quadrate.

415) Die folgende Tabelle gibt die Entwicklung der Weltbevölkerung (in Milliarden) seit dem Jahr 1950 wieder:

Jahr t	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Bevölkerung $f(t)$	2.53	3.04	3.70	4.45	5.31	6.12	6.90

Man finde eine Trendfunktion der Form $g(t) = ce^{at}$ und extrapoliere die Bevölkerungszahl für das Jahr 2020.
Hinweis: Man bestimme die Ausgleichsgerade für die Wertepaare $(t, \ln g(t))$ nach der Methode der kleinsten Quadrate.

416) Gegeben sind die Wertepaare (x_i, y_i) mit $1 \le i \le n$. In manchen Problemstellungen ist von vorneherein bekannt, daß die zugrundeliegende Funktion durch den Ursprung gehen muß. Im Falle der Approximation durch eine Gerade kann man dann den Ansatz $y = bx$ verwenden. Man ermittle nun, wie dabei b gewählt werden muß, wenn man nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgeht. D.h., man minimiere die Quadratsumme

$$Q(b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i)^2.$$

417) Im Rahmen der Polynominterpolation spielt die Vandermonde'sche Matrix

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

eine wichtige Rolle. Man zeige, dass für ihre Determinante gilt:

$$\det(V) = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

418) Der Gebrauchswert einer Maschine betrage nach zwei Jahren noch 50%, nach vier Jahren noch 25% des Anschaffungspreises. Man gebe ein Polynom $p(t)$ zweiten Grades als Funktion der Nutzungsdauer t an, das mit diesen empirischen Daten übereinstimmt und für $t = 0$ den Wert 100 (Neuwert mit 100%) annimmt. Ferner vergleiche man die Erfahrungswerte von 70% Gebrauchtwert nach einem Jahr und 35% nach drei Jahren mit den entsprechenden p-Werten.

419) Man bestimme das Interpolationspolynom dritten Grades zu den Interpolationsstellen $(0, 180)$, $(2, 240)$, $(4, 320)$ und $(6, 360)$ durch Lagrange-Interpolation.

420) Man löse das Interpolationsproblem aus Beispiel 419 unter Anwendung des Newtonschen Interpolationsverfahrens. Wie lauten die Funktionswerte des Interpolationspolynoms an den Stellen $x = 1, 3, 5$?

421) Wie lautet die natürliche kubische Splinefunktion, welche die Wertepaare aus Beispiel 419 interpoliert? Man vergleiche die Funktionswerte für $x = 1, 3, 5$ mit denen des kubischen Interpolationspolynoms.

422) Bestimmen Sie die Lagrange-Polynome $L_i(x)$ und das quadratische Interpolationspolynom für die Datenpunkte

x	1	2	3
y	-1	-2	3

423) Bestimmen Sie die Lagrange-Polynome $L_i(x)$ und das quadratische Interpolationspolynom für die Datenpunkte

x	0	1	4
y	2	-2	1

424) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom für die Datenpunkte

x	0	1	2	3
y	1	0	3	2

mit Hilfe der Newton-Interpolation.

425) Mit Hilfe der Sehnentrapezformel berechne man π aus der Gleichung

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Dabei verwende man eine Unterteilung des Integrationsintervalls in 2, 5 und 10 Teilintervalle.

426) Aus der Gleichung in Beispiel 425 berechne man π unte Anwendung (a) der Kepler'schen Fassregel bzw. (b) der Simpson'schen Regel bei Unterteilung des Integrationsintervalls in 10 Teilintervalle.

427) Mit Hilfe der (a) Sehnentrapezregel sowie (b) Simpson'schen Regel berechne man näherungsweise π aus der Gleichung

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Dabei verwende man eine Unterteilung des Integrationsintervalls bei (a) in 2, 5 und 10 Teilintervalle, bei (b) in 10 Teilintervalle.

428) Man bestimme näherungsweise das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + x^2} \; dx.$$

429) Mittels der Kepler'schen Fassregel kann das Volumen von Rotationskörpern (z.B. von Fässern) näherungsweise berechnet werden, falls deren Querschnitt an drei Stellen bekannt ist. Man zeige, dass man dabei für (a) den Zylinder, (b) Kegel und (c) Kegelstumpf sowie (d) das Rotationsparaboloid das genaue Volumen erhält.

430) In nachstehender Tabelle sind die Grenzbetriebskosten $k(t)$ einer Maschine bei einer Arbeitsleistung von t Betriebsstunden angegeben. Man bestimme daraus näherungsweise die Gesamtbetriebskosten $K(T) = \int_0^T k(t)dt$ für $T = 100$.

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$k(t)$	0.50	0.67	0.85	1.02	1.18	1.33	1.48	1.60	1.75	1.92	2.12

431) Für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 1 + x - y^3,\ y(0) = 0$$

bestimme man die Lösung an der Stelle $x = 1$ nach dem Euler'schen Polygonzugverfahren, und zwar für die Schrittweiten (a) $h = 0.25$ sowie (b) $h = 0.1$.

432) Man verbessere die in Beispiel 431 erhaltene Näherungslösung für die Schrittweite $h = 0.25$ durch Anwendung (a) des verbesserten Eulerverfahrens bzw. (b) des Runge-Kutta-Verfahrens.

433) Man finde näherungsweise die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = 2xy$ zum Anfangswert $y(0) = 2$ an der Stelle $x = 1$ und vergleiche den erhaltenen Wert mit der exakten Lösung $y(x) = 2 \cdot e^{x^2}$.

434) Man berechne für $y' = x + y^2$ und die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ mit dem Polygonzugverfahren die Werte $y(0.1)$ und $y(0.2)$.

435) Man bestimme für die Differentialgleichung $y' = axy$ mit $a \in \mathbb{R}$ für $a = -2$, $a = -1$ und $a = 1$ je 3 Strecken des Eulerschen Polygonzugs beginnend bei $P(1, 1)$ mit Schrittweite $\Delta x = 1$.

436) Gegeben sei das AWP $y' = x - y$, $y(0) = 1$. Man berechne die exakte Lösung und ermittle anschließend, wie groß n (Anzahl der Teilintervalle) gewählt werden muß, damit der relative Fehler beim Polygonzugverfahren für $y(x)$ an der Stelle $x = 1$ maximal 15% beträgt.

437) Konstruieren Sie zum AWP $y' = \alpha y$, $y(0) = y_0$ den Eulerschen Polygonzug E_n mit der Schrittweite $h = \xi/n$ auf dem Intervall $[0, \xi]$ (mit einem festen $\xi > 0$)und zeigen Sie, daß $E_n(\xi) \to y_0 e^{\alpha\xi}$ für $n \to \infty$.

438) In Analogie zu Beispiel 437: Konstruieren Sie zum AWP $y' = 1 + y$, $y(0) = y_0$ den Eulerschen Polygonzug E_n mit der Schrittweite $h = \xi/n$ auf dem Intervall $[0, \xi]$ (mit einem festen $\xi > 0$)und zeigen Sie, daß $E_n(\xi) \to y_0 e^{\alpha\xi}$ für $n \to \infty$. Konvergiert nun $E_n(\xi)$ ebenfalls gegen die exakte Lösung der Differentialgleichung?

439) Berechnen Sie vierstellige Runge-Kutta-Näherungswerte y_1, y_2 für die Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1$, an den Stellen $x_1 = 0.1$ und $x_2 = 0.2$.

440) Man vergleiche das Euler-Verfahren und das Verfahren von Runge-Kutta für das AWP $y' = 1 + \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$ an der Stelle $x = 1.6$, wobei $n = 3$ gewählt werden soll. Lösen Sie das AWP auch exakt und ermittle jeweils den relativen Fehler für die einzelnen Verfahren.
Anmerkung: Nach Möglichkeit programmiere man die einzelnen Verfahren. Wenn "mit der Hand" gerechnet werden muß, wählen Sie $n = 1$.