1. Übungsblatt - Analysis auf Mannigfaltigkeiten - WS 2011

1. Zeigen Sie, dass die definierenden Eigenschaften einer topologischen Mannigfaltigkeit unabhängig voneinander sind, d.h. geben Sie Beispiele topologischer Räume an, die nur jeweils zwei der drei definierenden Eigenschaften haben.

   Hinweis: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm 1\}/\sim$ mit $(x,1) \sim (x,-1)$ für $x \neq 0$ ist lokal euklidisch und erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, aber ist nicht Hausdorff.

2. Seien $M_1, \ldots, M_k$ topologische Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $n_1, \ldots, n_k$. Zeigen Sie, dass $M_1 \times \cdots \times M_k$ eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n_1 + \cdots n_k$ ist mit Karten der Form $(U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)$, wobei (U_i, φ_i), $1 \leq i \leq k$, Karten auf M_i sind.

3. Es sei X ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie:

   (a) Die Zusammenhangskomponenten von X sind offen in X.

   (b) Die Wegzusammenhangskomponenten von X stimmen mit den Zusammenhangskomponenten von X überein.

   (c) X ist genau dann zusammenhängend, wenn X wegzusammenhängend ist.

4. Es sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

   (a) Sind f, f' und g, g' Wege in X mit jeweils denselben Anfangs- und Endpunkten sowie $f(1) = f'(1) = g(0) = g'(0)$, so folgt aus $f \sim f'$ und $g \sim g'$ auch $f \cdot g \sim f' \cdot g'$.

   (b) Für Wege f, g, h in X gilt

   $$([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$$

   wannimmer die Produkte definiert sind.

5. Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie:

   (a) Die Fundamentalgruppen von X zu unterschiedlichen Basispunkten sind alle isomorph.

   (b) X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn je zwei Wege in X mit gleichen Anfangs- und Endpunkten homotop sind.

6. Zeigen Sie, dass es auf dem Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, überabzählbar viele verschiedene glatte Strukturen gibt.

7. Es bezeichne $N := (0, \dots, 0, 1)$ den "Nordpol" der Sphäre $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ und $S := -N$ den "Südpol". Die *stereographische Projektion* $\sigma : \mathbb{S}^n \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\sigma(x^1, \dots, x^{n+1}) = \frac{(x^1, \dots, x^n)}{1 - x^{n+1}}.$$

Für $x \in \mathbb{S}^n \backslash \{S\}$ setzen wir $\bar{\sigma}(x) = -\sigma(-x)$. Zeigen Sie:

(a) σ ist bijektiv und

$$\sigma^{-1}(u^1, \dots, u^n) = \frac{(2u^1, \dots, 2u^n, \|u\|^2 - 1)}{\|u\|^2 + 1}.$$

(b) Der Atlas auf $\mathbb{S}^n$ bestehend aus den zwei Karten $(\mathbb{S}^n \backslash \{N\}, \sigma)$ und $(\mathbb{S}^n \backslash \{S\}, \bar{\sigma})$ definiert eine glatte Struktur auf $\mathbb{S}^n$.

(c) Die in (b) definierte glatte Struktur auf $\mathbb{S}^n$ stimmt mit der in der Vorlesung eingeführten überein.

8. Es sei $M = \operatorname{clos} \mathbb{B}^n$ die abgeschlossene Euklidische Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand ist und dass M eine natürliche glatte Struktur trägt in der jeder Punkt von $\mathbb{S}^{n-1}$ ein Randpunkt ist und jeder Punkt von $\mathbb{B}^n$ ein innerer Punkt.